TUYỂN TẬP CÁC BÀI TẬP HÌNH HỌC PHẲNG HAY NHẤT

(Tài liệu để ôn thi đại học)

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm $A(1;0), B(-2;4), C(-1;4), D(3;5)$ và đường thẳng $d: 3x-y-5=0$. Tìm điểm M trên d sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Giải

- M thuộc d thi M(a;3a-5)
- Mặt khác : $\overrightarrow{AB}=(-3;4)\Rightarrow AB=5,(AB):\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{4}\Leftrightarrow 4x+3y-4=0$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD}=(4;1)\leftrightarrow CD=\sqrt{17};(CD):\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{1}\Leftrightarrow x-4y-17=0$$

- Tính : $h_1=(M,AB)=\frac{|4a+3(3a-5)-4|}{5}=\frac{|13a-19|}{5}, h_2=\frac{|a-4(3a-5)-17|}{\sqrt{17}}=\frac{|3-11a|}{\sqrt{17}}$
- Nếu diện tich 2 tam giác bằng nhau thì :

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.h_1=\frac{1}{2}CD.h_2\Leftrightarrow \frac{5.|13a-19|}{5}=\frac{\sqrt{17}.|3-11a|}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}13a-19=3-11a\\13a-19=11a-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=\frac{11}{12}\\a=8\end{array}\right.$$

- Vậy trên d có 2 điểm : $M_1\left(\frac{11}{12};-\frac{27}{12}\right), M_2(8;19)$

Bài 2. Cho hình tam giác ABC có diện tích bằng 2. Biết A(1;0), B(0;2) và trung điểm I của AC nằm trên đường thẳng y = x. Tìm toạ độ đỉnh C

Giải

- Nếu C nằm trên d : y=x thì A(a;a) do đó suy ra C(2a-1;2a).
- Ta có : $d(B,d)=\frac{|0-2|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.
- Theo giả thiết : $S=\frac{1}{2}AC.d(B,d)=2\Rightarrow AC=\frac{4}{\sqrt{2}}=\sqrt{(2a-2)^2+(2a-0)^2}$

$$\Leftrightarrow 8=8a^2-8a+4\Leftrightarrow 2a^2-2a-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

- Vậy ta có 2 điểm C : $C_1\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right), C_2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC*, với $A(1;1), B(-2;5)$, đỉnh *C* nằm trên đ-ờng thẳng $x-4=0$, và trọng tâm *G* của tam giác nằm trên đ-ờng thẳng $2x-3y+6=0$. Tính diện tích tam giác *ABC*.

Giải

- Tọa độ C có dạng : C(4;a) , $\overrightarrow{AB}=(-3;4)\Rightarrow \left[\begin{array}{l}AB=5\\(AB):\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{4}\Leftrightarrow 4x+3y-7=0\end{array}\right.$
- Theo tính chất trọng tâm ; $\begin{cases}x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_G=\frac{1-2+4}{3}=1\\y_G=\frac{1+5+a}{3}=\frac{a+6}{3}\end{cases}$

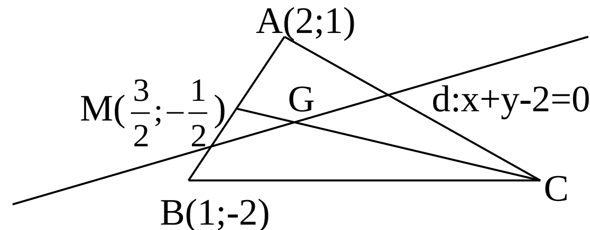
- Do G nằm trên : 2x-3y+6=0 , cho nên : $\Rightarrow 2.1-3\left(\frac{a+6}{3}\right)+6=0 \Leftrightarrow a=2$.

- Vậy M(4;2) và $d\left(C,AB\right)=\frac{\left|4.4+3.2-7\right|}{\sqrt{16+9}}=3 \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d\left(C,AB\right)=\frac{1}{2}5.3=\frac{15}{2}$ (đvdt)

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC, với $A(2;-1)$, $B(1;-2)$, trọng tâm G của tam giác nằm trên đ- ờng thẳng $x+y-2=0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác ABC bằng 13,5 .

Giải.

- Ta có : M là trung điểm của AB thì $M\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Gọi C(a;b) , theo tính chất trọng tam tam giác : $\begin{cases} x_G=\frac{a+3}{3} \\ y_G=\frac{b-3}{3} \end{cases}$



- Do G nằm trên d :

$$\frac{a+3}{3}+\frac{b-3}{3}-2=0 \Leftrightarrow a+b=6\left(1\right)$$

- Ta có : $\overrightarrow{AB}=\left(1;3\right) \Rightarrow \left(AB\right):\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x-y-5=0 \Leftrightarrow h\left(C,AB\right)=\frac{\left|3a-b-5\right|}{\sqrt{10}}$

- Từ giả thiết : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.h\left(C,AB\right)=\frac{1}{2}\sqrt{10}.\frac{\left|2a-b-5\right|}{\sqrt{10}}=\frac{\left|2a-b-5\right|}{2}=13,5$

$$\Leftrightarrow \left|2a-b-5\right|=27 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-b-5=27 \\ 2a-b-5=-27 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a-b=32 \\ 2a-b=-22 \end{array}\right.$$

- Kết hợp với (1) ta có 2 hệ :

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=6 \\ 2a-b=32 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=6 \\ 2a-b=-22 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=6 \\ 3a=38 \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=6 \\ 3a=-18 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=-\frac{20}{3} \\ a=\frac{38}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} b=12 \\ a=-6 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow C_1\left(\frac{38}{3};-\frac{20}{3}\right), C_2\left(-6;12\right)$$

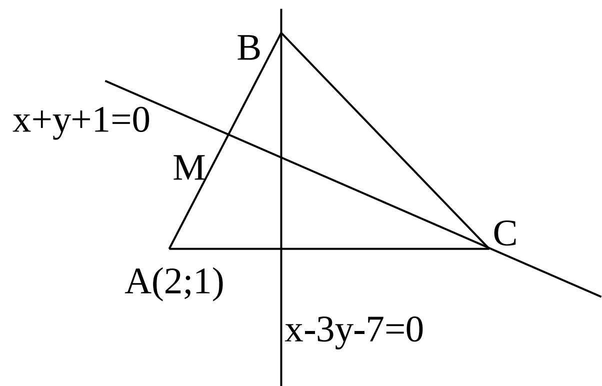
Bài 5. Trong mặt phẳng oxy cho ΔABC có A(2;1) . Đường cao qua đỉnh B có phương trình x- 3y - 7 = 0 .Đường trung tuyến qua đỉnh C có phương trình : x + y +1 = 0 . Xác định tọa độ B và C . Tính diện tích ΔABC .

Giải

- Đường thẳng (AC) qua A(2;1) và vuông góc với đường cao kẻ qua B , nên có véc tơ chỉ phương

$\vec{n}=\left(1;-3\right) \Rightarrow \left(AC\right):\begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \end{cases}\left(t\in R\right)$

- Tọa độ C là giao của (AC) với đường trung tuyến kẻ qua C : $\Rightarrow \begin{cases} x=2+t \\ y=1-3t \\ x+y+1=0 \end{cases}$



Giải ta được : t=2 và C(4;-5). Vì B nằm trên đường cao kẻ qua B suy ra B(3a+7;a) . M là trung điểm của AB $\Rightarrow M\left(\frac{3a+9}{2};\frac{a+1}{2}\right)$.

- Mặt khác M nằm trên đường trung tuyến kẻ qua C :

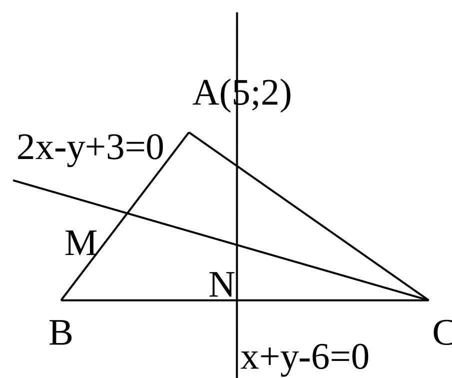
$$\Leftrightarrow \frac{3a+9}{2}+\frac{a+1}{2}+1=0 \Leftrightarrow a=-3 \Leftrightarrow B(1;-2)$$

- Ta có : $\overrightarrow{AB}=(-1;-3) \Leftrightarrow AB=\sqrt{10},(AB):\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{3} \Leftrightarrow 3x-y-5=0, h(C;AB)=\frac{|12|}{\sqrt{10}}$

- Vậy : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.h(C,AB)=\frac{1}{2}\sqrt{10}.\frac{12}{\sqrt{10}}=6$ (đvdt).

Bài 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* , cho tam giác *ABC* biết *A*(5; 2). Phương trình đường trung trực cạnh *BC*, đường trung tuyến *CC*' lần lượt là *x* + *y* – 6 = 0 và 2*x* – *y* + 3 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh của tam giác *ABC*

Giải



- Gọi B(a;b) suy ra M$\left(\frac{a+5}{2};\frac{b+2}{2}\right)$. M nằm trên trung tuyến nên : 2a-b+14=0 (1).
- B,B đối xứng nhau qua đường trung trực cho nên : $(BC):\begin{cases}x=a+t\\y=b+t\end{cases}(t\in R)$.

Từ đó suy ra tọa độ N :

$$\begin{cases}x=a+t\\y=b+t\\x+y-6=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=\frac{6-a-b}{2}\\x=\frac{3a-b-6}{2}\\y=\frac{6+b-a}{2}\end{cases}$$

$\Leftrightarrow N\left(\frac{3a-b-6}{2};\frac{6+b-a}{2}\right)$. Cho nên ta có tọa độ C(2a-b-6;6-a)

- Do C nằm trên đường trung tuyến : 5a-2b-9=0 (2)
- Từ (1) và (2) : $\Rightarrow \begin{cases}2a-b+14=0\\5a-2b-9=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=37\\b=88\end{cases} \Rightarrow B(37;88), C=(-20;-31)$

Bài 7. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta':3x-4y+10=0$ và điểm *A*(-2 ; 1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm *A* và tiếp xúc với đường thẳng Δ'.

Giải

- Gọi tâm đường tròn là I , do I thuộc $\Delta:\begin{cases}x=-2+3t\\y=-2-t\end{cases} \Rightarrow I(-2+3t;-2-t)$

- A thuộc đường tròn $\Rightarrow IA=\sqrt{(3t)^2+(3+t)^2}=R$ (1)

- Đường tròn tiếp xúc với $\Delta' \Rightarrow \frac{|3(-2+3t)-4(-t-2)+10|}{5}=R \Leftrightarrow \frac{|13t+12|}{5}=R$. (2)

- Từ (1) và (2) : $\sqrt{(3t)^2+(3+t)^2}=\frac{|13t+12|}{5} \Leftrightarrow 25\left[(3t)^2+(3+t)^2\right]=(13t+12)^2$

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ *Oxy* cho đường tròn hai đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $(C'): x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua *M* cắt hai đường tròn $(C),(C')$ lần lượt tại *A*, *B* sao cho *MA= 2MB*

Giải

* Cách 1.

- Gọi d là đường thẳng qua M có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d: \begin{cases} x=1+at \\ y=bt \end{cases}$
- Đường tròn $(C_1): I_1(1;1), R_1=1.(C_2): I_2(-2;0), R_2=3$, suy ra :

$(C_1): (x-1)^2+(y-1)^2=1, (C_2): (x+2)^2+y^2=9$

- Nếu d cắt (C_1) tại A : $\Rightarrow (a^2+b^2)t^2-2bt=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \to M \\ t=\dfrac{2b}{a^2+b^2} \end{array}\right. \Rightarrow A\left(1+\dfrac{2ab}{a^2+b^2};\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)$
- Nếu d cắt (C_2) tại B : $\Rightarrow (a^2+b^2)t^2+6at=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \to M \\ t=-\dfrac{6a}{a^2+b^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow B\left(1-\dfrac{6a^2}{a^2+b^2};-\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)$
- Theo giả thiết : MA=2MB $\Leftrightarrow MA^2=4MB^2\ (*)$
- Ta có : $\left(\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{2b^2}{a^2+b^2}\right)^2=4\left[\left(\dfrac{6a^2}{a^2+b^2}\right)^2+\left(\dfrac{6ab}{a^2+b^2}\right)^2\right]$

$$\Leftrightarrow \frac{4b^2}{a^2+b^2}=4.\frac{36a^2}{a^2+b^2} \Leftrightarrow b^2=36a^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-6a \to d: 6x+y-6=0 \\ b=6a \to d: 6x-y-6=0 \end{array}\right.$$

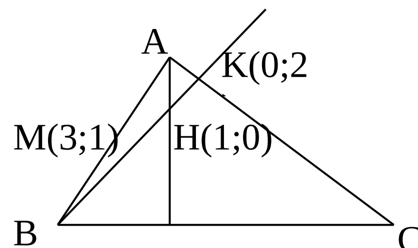
<u>* Cách 2.</u>

- Sử dụng phép vị tự tâm I tỉ số vị tự k=$-\dfrac{1}{2}$. (Học sinh tự làm)

Bài 9. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ *Oxy*, hãy viết phương trình các cạnh của tam giác *ABC* biết trực tâm $H(1;0)$, chân đường cao hạ từ đỉnh *B* là $K(0;2)$, trung điểm cạnh *AB* là $M(3;1)$.

Giải

- Theo tính chất đường cao : HK vuông góc với AC cho nên (AC) qua K(0;2) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{KH}=(1;-2) \Rightarrow (AC): x-2(y-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+4=0$.
- B nằm trên (BH) qua H(1;0) và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{KH}=(1;-2) \Rightarrow B(1+t;-2t)$.
- M(3;1) là trung điểm của AB cho nên A(5-t;2+2t).
- Mặt khác A thuộc (AC) cho nên : 5-t-2(2+2t)+4=0 , suy ra t=1 . Do đó A(4;4),B(2;-2)



- Vì C thuộc (AC) suy ra C(2t;2+t) ,

$\overrightarrow{BC}=(2t-2;4+t), \overrightarrow{HA}=(3;4)$. Theo tính chất đường cao kẻ từ A :

$\Rightarrow \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow 3(2t-2)+4(4+t)=0 \to t=-1$. Vậy : C(-2;1).

- (AB) qua A(4;4) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BA}=(2;6) // \vec{u}=(1;3) \Rightarrow (AB): \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-4}{3}$

$\Leftrightarrow 3x-y-8=0$

- (BC) qua B(2;-2) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{HA}=(3;4)\Rightarrow(BC):3(x-2)+4(y+2)=0$

$\Leftrightarrow 3x+4y+2=0$.

Bài 10. Trong hệ tọa độ *Oxy*, cho hai đường tròn có phương trình $(C_1): x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2): x^2+y^2-6x+8y+16=0$. Lập phương trình tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2).

Giải

- Ta có :

$(C_1): x^2+(y-2)^2=9\Rightarrow I_1(0;2), R_1=3,\quad (C_2):(x-3)^2+(y+4)^2=9\Rightarrow I_2(3;-4), R_2=3$

- Nhận xét : $I_1I_2=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}<3+3=6\Rightarrow(C_1)$ không cắt (C_2)

- Gọi d : ax+by+c =0 ($a^2+b^2\neq 0$) là tiếp tuyến chung , thế thì : $d(I_1,d)=R_1, d(I_2,d)=R_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3(1)\\ \dfrac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3(2)\end{cases}\Rightarrow\frac{|2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3a-4b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow|2b+c|=|3a-4b+c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3a-4b+c=2b+c\\3a-4b+c=-2b-c\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\\3a-2b+2c=0\end{array}\right.$. Mặt khác từ (1) : $(2b+c)^2=9(a^2+b^2)\Leftrightarrow$

- Trường hợp : a=2b thay vào (1) :

$$(2b+c)^2=9(4b^2+b^2)\Leftrightarrow 41b^2-4bc-c^2=0.\Delta'_b=4c^2+41c^2=45c^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{2b-3\sqrt{5}c}{4}\\ b=\dfrac{(2+3\sqrt{5})c}{4}\end{array}\right.$$

- Do đó ta có hai đường thẳng cần tìm :

$$d_1:\frac{(2-3\sqrt{5})}{2}x+\frac{(2-3\sqrt{5})}{4}y+1=0\Leftrightarrow 2(2-3\sqrt{5})x+(2-3\sqrt{5})y+4=0$$

$$d_1:\frac{(2+3\sqrt{5})}{2}x+\frac{(2+3\sqrt{5})}{4}y+1=0\Leftrightarrow 2(2+3\sqrt{5})x+(2+3\sqrt{5})y+4=0$$

- Trường hợp : $c=\dfrac{2b-3a}{2}$, thay vào (1) : $\dfrac{\left|2b+\dfrac{2b-3a}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Leftrightarrow|2b-a|=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\Leftrightarrow(2b-a)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 3b^2-4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\to c=-\dfrac{a}{2}\\ b=\dfrac{4a}{3}\to c=-\dfrac{a}{6}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0,a=-2c\\ b=\dfrac{4a}{3},a=-6c\end{array}\right.$$

- Vậy có 2 đường thẳng : $d_3: 2x-1=0$, $d_4: 6x+8y-1=0$

Bài 11. Trong hệ tọa độ *Oxy*, hãy viết phương trình hyperbol (*H*) dạng chính tắc biết rằng (*H*) tiếp xúc với đường thẳng $d: x-y-2=0$ tại điểm *A* có hoành độ bằng 4.

Giải

- Do A thuộc d : A(4;2)

- Giả sử (H) : $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(*)\Rightarrow A\in(H)\Leftrightarrow\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1(1)$

- Mặt khác do d tiếp xúc với (H) thì hệ sau có 12 nghiệm bằng nhau :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2x^2 - a^2(x-2)^2 = a^2b^2 \\ y = x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b^2-a^2)x^2 + 4a^2x - 4a^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = x-2 \end{cases}$$

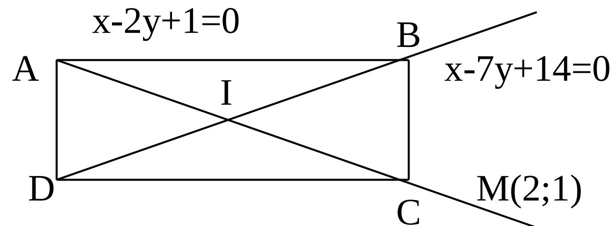
$$\Rightarrow \Delta'_a = 4a^4 + (b^2-a^2)(4a^2+a^2b^2) = 4a^2b^2 + a^2b^4 - a^4b^2 \Leftrightarrow a^2b^2(4+b^2-a^2) = 0 \Rightarrow a^2 = b^2+4$$

- Kết hợp với (1) : $\begin{cases} 16b^2 - 4a^2 = a^2b^2 \\ a^2 = b^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^4 - 8b^2 + 16 = 0 \\ a^2 = b^2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 4 \\ a^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (H): \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$

Bài 12. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có phương trình đường thẳng AB: x – 2y + 1 = 0, phương trình đường thẳng BD: x – 7y + 14 = 0, đường thẳng AC đi qua M(2; 1). Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật

Giải

- Dễ nhận thấy B là giao của BD với AB cho nên tọa dộ B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{21}{5};\frac{13}{5}\right)$



- Đường thẳng (BC) qua B(7;3) và vuông góc với (AB) cho nên có véc tơ chỉ phương:

$$\vec{u} = (1;-2) \Rightarrow (BC): \begin{cases} x = \frac{21}{5} + t \\ y = \frac{13}{5} - 2t \end{cases}$$

- Ta có : $\measuredangle(AC,BD) = \measuredangle BIC = 2\measuredangle ABD = 2\varphi = 2\measuredangle(AB,BD)$

- (AB) có $\vec{n_1} = (1;-2)$, (BD) có $\vec{n_2} = (1;-7) \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{n_1}.\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|} = \frac{1+14}{\sqrt{5}\sqrt{50}} = \frac{15}{5\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$

- Gọi (AC) có $\vec{n} = (a,b) \Rightarrow \cos(\text{AC,BD}) = \cos2\varphi = \frac{|a-7b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}} = 2\cos^2\varphi - 1 = 2\left(\frac{9}{10}\right) - 1 = \frac{4}{5}$

- Do đó : $\Rightarrow 5|a-7b| = 4\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow (a-7b)^2 = 32(a^2+b^2) \Leftrightarrow 31a^2 + 14ab - 17b^2 = 0$

- Suy ra : $\left[\begin{array}{l} a = -\frac{17}{31}b \Rightarrow (AC): -\frac{17}{31}(x-2) + (y-1) = 0 \Leftrightarrow 17x - 31y - 3 = 0 \\ a = b \Rightarrow (AC): \quad x-2+y-1 = 0 \Leftrightarrow x+y-3 = 0 \end{array}\right.$

- (AC) cắt (BC) tại C $\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{5} + t \\ y = \frac{13}{5} - 2t \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{7}{15} \Rightarrow C\left(\frac{14}{3};\frac{5}{3}\right)$

- (AC) cắt (AB) tại A : $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=4 \end{cases} \Leftrightarrow A(7;4)$

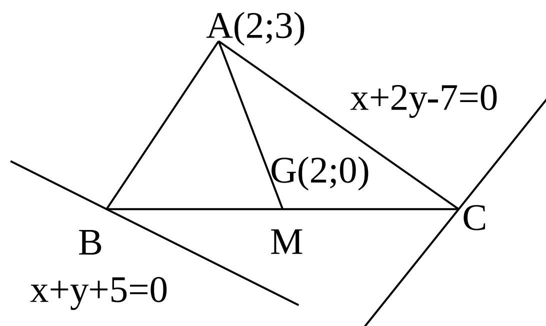
- (AD) vuông góc với (AB) đồng thời qua A(7;4) suy ra (AD) : $\begin{cases} x = 7+t \\ y = 4-2t \end{cases}$

- (AD) cắt (BD) tại D : $\begin{cases} x=7+t \\ y=4-2t \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Rightarrow t=\frac{7}{15} \Rightarrow D\left(\frac{98}{15};\frac{46}{15}\right)$

- Trường hợp (AC) : 17x-31y-3=0 các em làm tương tự .

Bài 13. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho tam giác ABC, có điểm A(2; 3), trọng tâm G(2; 0). Hai đỉnh B và C lần lượt nằm trên hai đường thẳng d_1: x + y + 5 = 0 và d_2: x + 2y – 7 = 0. Viết phương trình đường tròn có tâm C và tiếp xúc với đường thẳng BG

Giải



- B thuộc d suy ra B : $\begin{cases} x=t \\ y=-5-t \end{cases}$, C thuộc d'

cho nên C: $\begin{cases} x=7-2m \\ y=m \end{cases}$.

- Theo tính chất trọng tâm :

$\Rightarrow x_G=\frac{(t-2m+9)}{3}=2, y_G=\frac{m-t-2}{3}=0$

- Ta có hệ : $\begin{cases} m-t=2 \\ t-2m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ t=-1 \end{cases}$

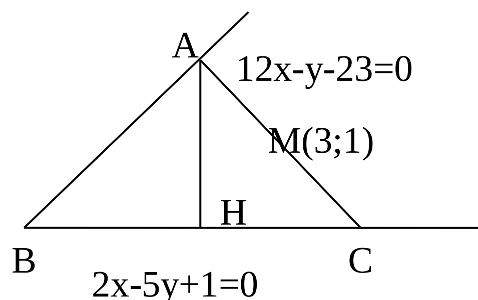
- Vậy : B(-1;-4) và C(5;1) . Đường thẳng (BG) qua G(2;0) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;4)$,

cho nên (BG): $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x-3y-8=0 \Rightarrow d(C;BG)=\frac{|20-15-8|}{5}=\frac{13}{5}=R$

- Vậy đường tròn có tâm C(5;1) và có bán kính R=$\frac{13}{5} \Rightarrow (C):(x-5)^2+(y-1)^2=\frac{169}{25}$

Bài 14. Tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng : 2x – 5y + 1 = 0, cạnh bên AB nằm trên đường thẳng : 12x – y – 23 = 0 . Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng nó đi qua điểm (3;1)

Giải



- Đường (AB) cắt (BC) tại B $\begin{cases} 2x-5y+1=0 \\ 12x-y-23=0 \end{cases}$

Suy ra : B(2;-1). . (AB) có hệ số góc k=12, đường thẳng (BC) có hệ số góc k'=$\frac{2}{5}$, do đó ta có :

$\tan B=\left|\frac{12-\frac{2}{5}}{1+12.\frac{2}{5}}\right|=2$. Gọi (AC) có hệ số góc là m thì

ta có : $\tan C=\left|\frac{\frac{2}{5}-m}{1+\frac{2m}{5}}\right|=\left|\frac{2-5m}{5+2m}\right|$. Vì tam giác ABC cân tại A cho nên tanB=tanC, hay ta có :

$\left|\frac{2-5m}{5+2m}\right|=2 \Leftrightarrow |2-5m|=2|2m+5| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2-5m=4m+10 \\ 2-5m=-4m-10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-\frac{8}{9} \\ m=12 \end{array}\right.$

- Trường hợp : $m=-\frac{9}{8} \Rightarrow (AC): y=-\frac{9}{8}(x-3)+1 \Leftrightarrow 9x+8y-35=0$

- Trường hợp : m=12 suy ra (AC): y=12(x-3)+1 hay (AC): 12x-y-25=0 (loại vì nó //AB).

- Vậy (AC) : 9x+8y-35=0 .

Bài 15. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn :

(C_1) : $(x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 225$ và (C_2) : $(x – 1)^2 + (y – 2)^2 = 25$

Giải : .

- Ta có (C) với tâm I(5;-12) ,R=15. (C') có J(1;2) và R'=5. Gọi d là tiếp tuyến chung có phương trình : ax+by+c=0 ($a^2+b^2 \neq 0$).

- Khi đó ta có : $h(I,d)=\frac{|5a-12b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=15\,(1), h(J,d)=\frac{|a+2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=5\,(2)$

- Từ (1) và (2) suy ra : $|5a-12b+c|=3|a+2b+c| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5a-12b+c=3a+6b+3c\\5a-12b+c=-3a-6b-3c\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a-9b=c\\-2a+\frac{3}{2}b=c\end{array}\right.$. Thay vào (1) : $|a+2b+c|=5\sqrt{a^2+b^2}$ ta có hai trường hợp :

- Trường hợp : c=a-9b thay vào (1) : $(2a-7b)^2=25(a^2+b^2) \Leftrightarrow 21a^2+28ab-24b^2=0$

Suy ra : $\left[\begin{array}{l}a=\frac{14-10\sqrt{7}}{21} \rightarrow d:\left(\frac{14-10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\frac{175+10\sqrt{7}}{21}=0\\a=\frac{14+10\sqrt{7}}{21} \rightarrow d:\left(\frac{14+10\sqrt{7}}{21}\right)x+y-\frac{175-10\sqrt{7}}{21}=0\end{array}\right.$

- Trường hợp : $c=-2a+\frac{3}{2}b \Rightarrow (1):(7b-2a)^2=100(a^2+b^2) \Leftrightarrow 96a^2+28ab+51b^2=0$. Vô nghiệm . (Phù hợp vì : $IJ=\sqrt{16+196}=\sqrt{212}<R+R'=5+15=20=\sqrt{400}$. Hai đường tròn cắt nhau) .

Bài 16. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) : $x^2+y^2+2x-8y-8=0$. Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng d: 3x+y-2=0 và cắt đường tròn theo một dây cung có độ dài bằng 6.

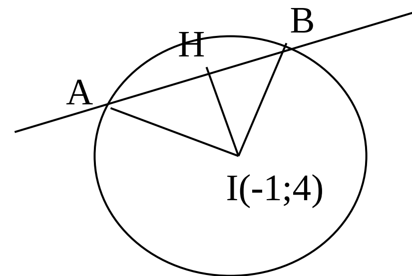
Giải

- Đường thẳng d' song song với d : 3x+y+m=0

- IH là khoảng cách từ I đến d' : $IH=\frac{|-3+4+m|}{5}=\frac{|m+1|}{5}$

- Xét tam giác vuông IHB : $IH^2=IB^2-\left(\frac{AB^2}{4}\right)=25-9=16$

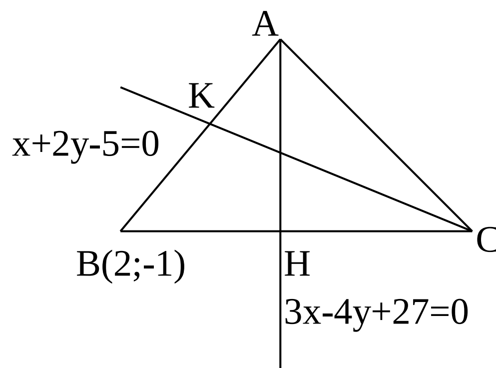
$\Leftrightarrow \frac{(m+1)^2}{25}=16 \Leftrightarrow |m+1|=20 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=19 \rightarrow d':3x+y+19=0\\m=-21 \rightarrow d':3x+y-21=0\end{array}\right.$



Bài 17. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC biết B(2; -1), đường cao và đường phân giác trong qua đỉnh A, C lần lượt là : (d_1) : 3x – 4y + 27 = 0 và (d_2) : x + 2y– 5=0

Giải

- Đường thẳng (BC) qua B(2;-1) và vuông góc với (AH) suy ra (BC): $\left\{\begin{array}{l}x=2+3t\\y=-1-4t\end{array}\right.$, hay :



$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-4} \Leftrightarrow 4x+3y-7=0 \perp \vec{n}=(4;3)$

- (BC) cắt (CK) tại C : $\Rightarrow \begin{cases} x=2+3t \\ y=-1-4t \\ x+2y-5=0 \end{cases} \rightarrow t=-1 \Leftrightarrow C(-1;3)$

- (AC) qua C(-1;3) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$

Suy ra (AC): a(x+1)+b(y-3)=0 (*). Gọi $\varphi=\measuredangle KCB=\measuredangle KCA \Rightarrow \cos\varphi=\frac{4+6}{\sqrt{5}\sqrt{16+9}}=\frac{10}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

- Tương tự : $\cos\varphi=\frac{|a+2b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{5}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow (a+2b)^2=4(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow 3a^2-4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Rightarrow b(y-3)=0 \leftrightarrow y-3=0 \\ a=\frac{4b}{3} \Rightarrow \frac{4}{3}(x+1)+(y-3)=0 \leftrightarrow 4x+3y-5=0 \end{array}\right.$

- (AC) cắt (AH) tại A : $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y-3=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ 3x-4y+27=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3 \\ x=-5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{31}{25} \\ y=\frac{582}{25} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow A_1(-5;3), A_2=\left(-\frac{31}{25};\frac{582}{25}\right)$

- Lập (AB) qua B(2;-1) và 2 điểm A tìm được ở trên . (học sinh tự lập).

Bài 18. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcác vuông góc Oxy , xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là : $\sqrt{3}$x – y - $\sqrt{3}$ = 0, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếptam giác ABC bằng 2 . Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC .

Giải

- Đường thẳng (BC) cắt Ox tại B : Cho y=0 suy ra x=1 , B(1;0) . Gọi A(a;0) thuộc Ox là đỉnh của góc vuông (a khác 1).. Đường thẳng x=a cắt (BC) tại C : $\left(a;\sqrt{3}(a-1)\right)$.

- Độ dài các cạnh : $AB=|a-1|, AC=\sqrt{3}|a-1| \Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow BC=2|a-1|$

- Chu vi tam giác : 2p=$|a-1|+\sqrt{3}|a-1|+2|a-1|=\left(3+\sqrt{3}\right)|a-1| \Leftrightarrow p=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)|a-1|}{2}$

- Ta có : S=pr suy ra p=$\frac{S}{r}$.(*) Nhưng S=$\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}|a-1|\sqrt{3}|a-1|=\frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2$. Cho nên

(*) trở thành : $\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)|a-1|=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-1)^2 \Rightarrow |a-1|=2\left(\sqrt{3}+1\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3+2\sqrt{3} \\ a=-1-2\sqrt{3} \end{array}\right.$

- Trọng tâm G :

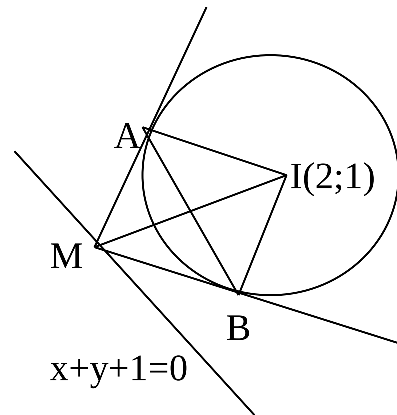
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\frac{2a+1}{3} \\ y_G=\frac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_G=\frac{2\left(3+2\sqrt{3}\right)+1}{3}=\frac{7+4\sqrt{3}}{3} \\ y_G=\frac{\sqrt{3}\left(2+2\sqrt{3}\right)}{3}=\frac{2\sqrt{3}+6}{3} \end{cases} \Leftrightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}+6}{3}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2a+1}{3} \\ y_G = \dfrac{\sqrt{3}(a-1)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2\left(-1-2\sqrt{3}\right)+1}{3} = -\dfrac{1+4\sqrt{3}}{3} \\ y_G = \dfrac{\sqrt{3}\left(-2-2\sqrt{3}\right)}{3} = -\dfrac{2\sqrt{3}+6}{3} \end{cases} \Rightarrow G_2\left(-\dfrac{1+4\sqrt{3}}{3};-\dfrac{2\sqrt{3}+6}{3}\right)$

Bài 19. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho đường tròn (C) : $x^2+y^2-4x-2y-1=0$ và đường thẳng d : $x+y+1=0$. Tìm những điểm M thuộc đường thẳng d sao cho từ điểm M kẻ được đến (C) hai tiếp tuyến hợp với nhau góc 90^0

Giải

- M thuộc d suy ra M(t;-1-t). . Nếu 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau thì MAIB là hình vuông (A,B là 2 tiếp điểm).
Do đó AB=MI= IA $\sqrt{2}$ =R $\sqrt{2}=\sqrt{6}\sqrt{2}=2\sqrt{3}$.



- Ta có : $MI=\sqrt{(2-t)^2+(2+t)^2}=\sqrt{2t^2+8}=2\sqrt{3}$
- Do đó :

$2t^2+8=12 \Leftrightarrow t^2=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\sqrt{2} \to M_1\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}-1\right) \\ t=\sqrt{2} \to M_2\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}-1\right) \end{array}\right.$.

* Chú ý : Ta còn cách khác
- Gọi d' là đường thẳng qua M có hệ số góc k suy ra d' có phương trình : y=k(x-t)-t-1, hay : kx-y-kt-t-1=0 (1) .
- Nếu d' là tiếp tuyến của (C) kẻ từ M thì d(I;d')=R $\Rightarrow \dfrac{|2k-kt-t-2|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow \left[(2-t)k-t-2\right]^2=6\left(1+k^2\right) \Leftrightarrow \left(t^2-4t-2\right)k^2+2(t+2)(2-t)k+\left(t^2+4t-2\right)=0$

- Từ giả thiết ta có điều kiện : $\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-4t-2 \neq 0 \\ \Delta'=\left(4-t^2\right)-\left(t^2-2-4t\right)\left(t^2-2+4t\right)>0 \\ \dfrac{t^2+4t-2}{t^2-4t-2}=-1 \end{cases}$

$-\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 2\pm\sqrt{6} \\ \Delta'=t^2\left(19-t^2\right)>0 \Rightarrow t=\pm\sqrt{2} \\ t^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1+k_2=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ k_1k_2=-1 \end{cases} \Rightarrow k_1;k_2 \Leftrightarrow M$

Bài 20. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho elip (E) : $x^2+4y^2-4=0$.Tìm những điểm N trên elip (E) sao cho : $F_1\hat{N}F_2=60^0$ (F_1 , F_2 là hai tiêu điểm của elip (E))

Giải

- (E) : $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow a^2=4, b^2=1 \leftrightarrow c^2=3 \to c=\sqrt{3}$

- Gọi $N\left(x_0;y_0\right) \in (E) \Rightarrow \begin{cases} x_0^2+4y_0^2=4 \\ MF_1=2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0; MF_2=2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_0 \\ F_1F_2=2\sqrt{3} \end{cases}$. Xét tam giác F_1MF_2 theo hệ thức hàm số cos : $\left(F_1F_2\right)^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1MF_2\cos60^0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{3}\right)^2=\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2+\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)^2-\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_0\right)$

$\Leftrightarrow 12=8+\frac{3}{2}x_0^2-\left(4-\frac{3}{4}x_0^2\right)\Leftrightarrow \frac{9}{4}x_0^2=8\Leftrightarrow x_0^2=\frac{32}{9}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-\frac{4\sqrt{2}}{3} \\ x_0=\frac{4\sqrt{2}}{3}\end{array}\right. \Rightarrow y_0^2=\frac{1}{9}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0=-\frac{1}{3} \\ y_0=\frac{1}{3}\end{array}\right.$

- Như vậy ta tìm được 4 điểm : $N_1\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right),N_2\left(\frac{-4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right),N_3\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};-\frac{1}{3}\right),N_4\left(\frac{4\sqrt{2}}{3};\frac{1}{3}\right)$

Bài 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm A(1;1) và đường thẳng Δ: 2x + 3y + 4 =0 Tìm tọa độ điểm B thuộc đường thẳng Δ sao cho đường thẳng AB và Δ hợp với nhau góc 45^0.

Giải

- Gọi d là đường thẳng qua A(1;1) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ thì d có phương trình dạng : a(x-1)+b(y-1)=0 (*). Ta có $\overrightarrow{n_\Delta}=(2;3)$.

- Theo giả thiết : $\cos(d,\Delta)=\left|\frac{2a+3b}{\sqrt{13}\sqrt{a^2+b^2}}\right|=\cos 45^0=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow 2(2a+3b)^2=13(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow 5a^2-24ab-5b^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-\frac{1}{5}b\rightarrow d:-\frac{1}{5}(x-1)+(y-1)=0\leftrightarrow x-5y+4=0 \\ a=5b\rightarrow d:5(x-1)+(y-1)=0\leftrightarrow 5x+y-6=0\end{array}\right.$

- Vậy B là giao của d với Δ cho nên :

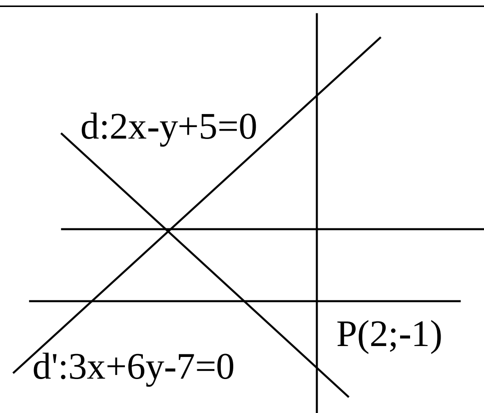
$\Rightarrow B_1\begin{cases} x-5y+4=0 \\ 2x+3y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow B_1\left(-\frac{32}{13};\frac{4}{13}\right),B_2:\begin{cases}5x+y-6=0 \\ 2x+3y+4=0\end{cases}\Rightarrow B_2\left(\frac{22}{13};-\frac{32}{13}\right)$

Bài 22. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy* cho cho hai đường thẳng $d_1: 2x-y+5=0$. d_2: 3x +6y – 7 = 0. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm *P*(2; -1) sao cho đường thẳng đó cắt hai đường thẳng d_1 và d_2 tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2.

Giải

- Trước hết lập phương trình 2 đường phân giác tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau :

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x+6y-7}{3\sqrt{5}}=-\frac{2x-y+5}{\sqrt{5}} \\ \frac{3x+6y-7}{3\sqrt{5}}=\frac{2x-y+5}{\sqrt{5}}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x+3y+8=0 \\ 3x-9y+22=0\end{array}\right.$



- Lập đường thẳng Δ_1 qua P(2;-1) và vuông góc với tiếp tuyến : 9x+3y+8=0 .

$\Rightarrow \Delta_1:\frac{x-2}{9}=\frac{y+1}{3}\Leftrightarrow x-3y-5=0$

- Lập Δ_2 qua P(2;-1) và vuông góc với : 3x-9y+22=0 $\Leftrightarrow \Delta_2:\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-9}\Leftrightarrow 3x+y-5=0$

Bài 23. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy* cho Hypebol (*H*) có phương trình: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Viết phương trình chính tắc của elip (*E*) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (*H*) và ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (*H*).

Giải

- (H) có $a^2=16, b^2=9 \Rightarrow c^2=25 \leftrightarrow c=5 \leftrightarrow F_1(5;0), F_2(5;0)$. Và hình chữ nhật cơ sở của (H) có các đỉnh : $(4;-3),(4;3),(-4;-3),(-4;3)$.
- Giả sử (E) có : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Nếu (E) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm của (H) thì ta có phương trình : $c^2=a^2-b^2=25\,(1)$
- (E) đi qua các điểm có hoành độ $x^2=16$ và tung độ $y^2=9 \Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1\,(2)$
- Từ (1) và (2) suy ra : $a^2=40, b^2=15 \Rightarrow (E)$: $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{15}=1$

Bài 24. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2+y^2+4\sqrt{3}x-4=0$ Tia Oy cắt (C) tại A. Lập phương trình đường tròn (C'), bán kính R' = 2 và tiếp xúc ngoài với (C) tại A

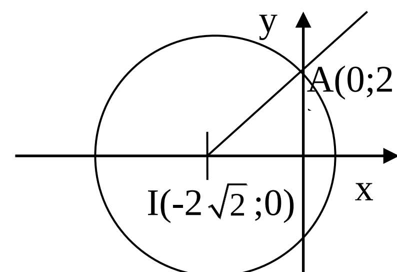
Giải

- (C) có I($-2\sqrt{3};0$), R= 4 . Gọi J là tâm đường tròn cần tìm :

J(a;b)$\Rightarrow (C'):(x-a)^2+(y-b)^2=4$

-Do (C) và (') tiếp xúc ngoài với nhau cho nên khoảng cách

IJ =R+R'$\Rightarrow \sqrt{\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2}=4+2=6 \Leftrightarrow a^2+4\sqrt{3}a+b^2=28$



- Vì A(0;2) là tiếp điểm cho nên : $(0-a)^2+(2-b)^2=4\,(2)$
- Do đó ta có hệ : $\begin{cases}\left(a+2\sqrt{3}\right)^2+b^2=36\\ a^2+(2-b)^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2+4\sqrt{3}a+b^2=24\\ a^2-4b+b^2=0\end{cases}$
- Giải hệ tìm được : b=3 và a= $\sqrt{3} \Rightarrow (C'):\left(x-\sqrt{3}\right)^2+(y-3)^2=4$.

* **<u>Chú ý</u>** : Ta có cách giải khác .

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của J trên Ox suy ra OH bằng a và JH bằng b
- Xét các tam giác đồng dạng : IOA và IHJ suy ra : $\frac{IA}{IJ}=\frac{IO}{IH}=\frac{OA}{HJ} \Leftrightarrow \frac{4}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{a+2\sqrt{3}}=\frac{2}{b}$
- Từ tỷ số trên ta tìm được : b=3 và a= $\sqrt{3}$.

Bài 25. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB: x -2y -1 =0, đường chéo BD: x- 7y +14 = 0 và đường chéo AC đi qua điểm M(2;1). Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật

Giải

- Hình vẽ : (Như bài 12).

- Tìm tọa độ B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-2y-1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Rightarrow B(7;3)$.

- Đường thẳng (BC) qua B(7;3) và $\perp(AB) \Rightarrow \overrightarrow{u_{BC}}=(1;-2) \Leftrightarrow (BC): \begin{cases} x=7+t \\ y=3-2t \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x+y-17=0 \to k_{BC}=-\frac{1}{2}$. Mặt khác : $k_{BD}=\frac{1}{7}, k_{AB}=\frac{1}{2} \Rightarrow \tan\varphi = \left|\frac{\frac{1}{7}-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{7}\frac{1}{2}}\right| = \frac{1}{3}$

- Gọi (AC) có hệ số góc là k $\Rightarrow \tan 2\varphi = \left|\frac{k-\frac{1}{7}}{1+\frac{k}{7}}\right| = \left|\frac{7k-1}{7+k}\right| = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan^2\varphi} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$

- Do đó : $4|7k-1| = 3|k+7| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 28k-4=-3k-21 \\ 28k-4=3k+21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-\frac{17}{31} \\ k=1 \end{array}\right.$

- Trường hợp : k=1 suy ra (AC) : y=(x-2)+1 , hay : x-y-1=0 .

- C là giao của (BC) với (AC) : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=7+t \\ y=3-2t \\ x-y-1=0 \end{cases} \to t=-1, C(6;5)$

- A là giao của (AC) với (AB) : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=7+t \\ y=3-2t \\ x-2y-1=0 \end{cases} \to t=0, A(1;0)$

- (AD) //(BC) suy ra (AD) có dạng : 2x+y+m=0 (*) , do qua A(1;0) : m= -2 . Cho nên (AD) có phương trình : 2x+y-2=0 .

- D là giao của (AD) với (BD) : $\begin{cases} 2x+y-2=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Rightarrow D(0;2)$

- Trường hợp : k=- $\frac{17}{31}$ cách giải tương tự (Học sinh tự làm).

Bài 26. Trong mp (Oxy) cho đường thẳng (Δ) có phương trình: x – 2y – 2 = 0 và hai điểm A (-1;2); B (3;4). Tìm điểm M $\in$(Δ) sao cho 2MA^2 + MB^2 có giá trị nhỏ nhất

Giải

- M thuộc Δ suy ra M(2t+2;t)
- Ta có : $MA^2=(2t+3)^2+(t-2)^2=5t^2+8t+13 \Rightarrow 2MA^2=10t^2+16t+26$

Tương tự : $MB^2=(2t-1)^2+(t-4)^2=5t^2-12t+17$

- Do dó : f(t)= $15t^2+4t+43 \Rightarrow f'(t)=30t+4=0 \to t=-\frac{2}{15}$. Lập bảng biến thiên suy ra min f(t) = $\frac{641}{15}$ đạt được tại $t=-\frac{2}{15} \Rightarrow M\left(\frac{26}{15};-\frac{2}{15}\right)$

Bài 27. Cho đường tròn (C): x^2 + y^2 – 2x – 6y + 6 = 0 và điểm M (2;4)

Viết phương trình đường thẳng đi qua M cắt đường tròn tại 2 điểm A và B, sao cho M là trung điểm của AB

Giải

- Đường tròn (C) : $(x-1)^2+(y-3)^2=4 \Rightarrow I(1;3), R=2, P_{M/(C)}=1+1-4=-2<0 \Rightarrow M$ nằm trong hình tròn (C) .
- Gọi d là đường thẳng qua M(2;4) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d: \begin{cases} x=2+at \\ y=4+bt \end{cases}$
- Nếu d cắt (C) tại A,B thì : $(at+1)^2+(bt+1)^2=4 \Leftrightarrow (a^2+b^2)t^2+2(a+b)t-2=0(1)$ (có 2 nghiệm t) . Vì vậy điều kiện : $\Delta'=(a+b)^2+2(a^2+b^2)=3a^2+2ab+3b^2>0(*)$
- Gọi $A(2+at_1;4+bt_1), B(2+at_2;4+bt_2) \Rightarrow$ M là trung điểm AB thì ta có hệ :

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4+a(t_1+t_2)=4 \\ 8+b(t_1+t_2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(t_1+t_2)=0 \\ b(t_1+t_2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow t_1+t_2=0$. Thay vào (1) khi áp dụng vi ét ta được :

$$\Leftrightarrow t_1+t_2=-\frac{2(a+b)}{a^2+b^2}=0 \Leftrightarrow a+b=0 \Leftrightarrow a=-b \Rightarrow d: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-4}{1} \Leftrightarrow d: \quad x+y-6=0$$

Bài 28. Viết phương trình các tiếp tuyến của e líp (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, biết tiếp tuyến đi qua điểmA(4;3)

Giải

- Giả sử đường thẳng d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ qua A(4;3) thì d có phương trình là :a(x-4)+b(y-3)=0 (*) , hay : ax+by-4a-3b (1) .
- Để d là tiếp tuyến của (E) thì điều kiện cần và đủ là : $a^2.16+b^2.9=(4a+3b)^2$

$$\Leftrightarrow 16a^2+9b^2=16a^2+24ab+9b^2 \Leftrightarrow 24ab=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \leftrightarrow d: \quad y-3=0 \\ b=0 \leftrightarrow d: \quad x-4=0 \end{array}\right.$$

Bài 29. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2my + m^2 - 24 = 0$ có tâm I và đường thẳng Δ: mx + 4y = 0. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

Giải

- (C) : $(x-1)^2+(y-m)^2=25 \quad \Rightarrow I(1;m), R=5$.
- Nếu d : mx +4y=0 cắt (C) tại 2 điểm A,B thì $\begin{cases} y=-\frac{m}{4}x \\ \left(\frac{m^2+16}{16}\right)x^2-2\left(\frac{4+m^2}{4}\right)x+m^2-24=0(1) \end{cases}$
- Điều kiện : $\Delta'=m^2+25>0 \Leftrightarrow m \in R$. Khi đó gọi $A\left(x_1;-\frac{m}{4}x_1\right), B\left(x_2;-\frac{m}{4}x_2\right)$

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+\frac{m^2}{16}(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|\frac{\sqrt{m^2+16}}{4}=8\frac{\sqrt{m^2+25}}{\sqrt{m^2+16}}$$

- Khoảng cách từ I đến d = $\frac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}}=\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}$

- Từ giả thiết : $S=\frac{1}{2}AB.d=\frac{1}{2}.8\frac{\sqrt{m^2+25}}{\sqrt{m^2+16}}.\frac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}=4|5m|\frac{\sqrt{m^2+25}}{m^2+16}=12$

$\Leftrightarrow |5m|\frac{\sqrt{m^2+25}}{m^2+16}=3\Leftrightarrow 25m^2\left(m^2+25\right)=9\left(m^2+16\right)^2$

- Ta có một phương trình trùng phương , học sinh giải tiếp .

Bài 30. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB: x - y - 2 = 0, phương trình cạnh AC: x + 2y - 5 = 0. Biết trọng tâm của tam giác G(3; 2). Viết phương trình cạnh BC

Giải

- (AB) cắt (AC) tại A : $\Rightarrow\begin{cases}x-y-2=0\\x+2y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow A(3;1)$

- B nằm trên (AB) suy ra B(t; t-2), C nằm trên (AC) suy ra C(5-2m;m)

- Theo tính chất trọng tâm : $\begin{cases}x_G=\frac{t-2m+8}{3}=3\\y_G=\frac{t+m-1}{3}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-2m=1\\t+m=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\to C(1;2)\\t=5\to B(5;3)\end{cases}$

Bài 31. Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm A(2; 5), B(4;1) và tiếp xúc với đường thẳng có phương trình 3x – y + 9 = 0.

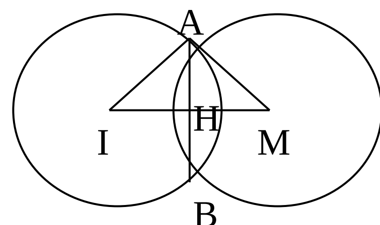
Giải

- Gọi M là trung điểm AB suy ra M(3;3) . d' là đường trung trực của AB thì d' có phương trình : 1.(x-3)-2(y-3)=0 , hay : x-2y+3=0 .
- Tâm I của (C) nằm trên đường thẳng d' cho nên I(2t-3;t) (*)
- Nếu (C) tiếp xúc với d thì $h(I,d)=R\Leftrightarrow\frac{|3(2t-3)-t+9|}{\sqrt{10}}=\frac{|5t|}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}|t|=R$. (1)
- Mặt khác : R=IA=$\sqrt{(5-2t)^2+(5-t)^2}$. (2) .
- Thay (2) vào (1) : $\sqrt{(5-2t)^2+(5-t)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}|t|\Leftrightarrow 4\left(5t^2-30t+50\right)=10t^2$

$\Leftrightarrow t^2-12t+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=6-\sqrt{34}\\t=6+\sqrt{34}\end{array}\right.$. Thay các giá trị t vào (*) và (1) ta tìm được tọa độ tâm I và bán kính R của (C) .

* **Chú ý** : Ta có thể sử dụng phương trình (C) : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (có 3 ẩn a,b,c)
- Cho qua A,B ta tạo ra 2 phương trình . Còn phương trình thứ 3 sử dụng điều kiện tiếp xúc của (C) và d : khoảng cách từ tâm tới d bằng bán kính R .

Bài 32. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$.
Viết phương trình đường tròn (C') tâm M(5, 1) biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.



Giải

- Đường tròn (C) :
$(x-1)^2+(y+2)^2=3\Rightarrow I(1;-2),R=\sqrt{3}$.

- Gọi H là giao của AB với (IM). Do đường tròn (C') tâm M có bán kính R' = MA . Nếu AB= $\sqrt{3}=IA=R$, thì tam giác IAB là tam giác đều , cho nên IH= $\frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$ (đường cao tam giác đều) . Mặt khác : IM=5 suy ra HM= $5-\frac{3}{2}=\frac{7}{2}$.

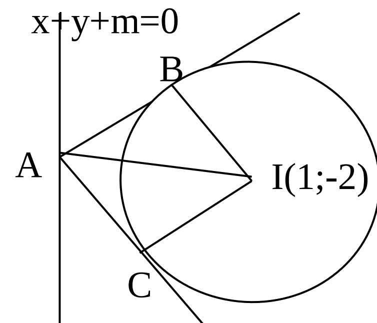
- Trong tam giác vuông HAM ta có $MA^2=IH^2+\frac{AB^2}{4}=\frac{49}{4}+\frac{3}{4}=13=R'^2$

- Vậy (C') : $(x-5)^2+(y-1)^2=13$.

Bài 33. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đ- ờng tròn (C) có ph- ơng trình $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đ- ờng thẳng d: x + y + m = 0. Tìm m để trên đ- ờng thẳng d có duy nhất một điểm A mà từ đó kẻ đ- ợc hai tiếp tuyến AB, AC tới đ- ờng tròn (C) (B, C là hai tiếp điểm) sao cho tam giác ABC vuông.

Giải

- (C) có I(1;-2) và bán kính R=3 . Nếu tam giác ABC vuông góc tại A (có nghĩa là từ A kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C) và 2 tiếp tuyến vuông góc với nhau) khi đó ABIC là hình vuông . Theo tính chất hình vuông ta có IA= IB$\sqrt{2}$ (1) .



- Nếu A nằm trên d thì A(t;-m-t) suy ra : $IA=\sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}$. Thay vào (1) :

$\Rightarrow \sqrt{(t-1)^2+(t-2+m)^2}=3\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2t^2-2(m-1)t+m^2-4m-13=0$ (2). Để trên d có đúng 1 điểm A thì (2) có đúng 1 nghiệm t , từ đó ta có điều kiện : $\Delta=-(m^2+10m+25)=0\Leftrightarrow-(m+5)^2=0\Rightarrow m=-5$ .Khi đó (2) có nghiệm kép là : $t_1=t_2=t_0=\frac{m-1}{2}=\frac{-5-1}{2}=-3\Rightarrow A(-3;8)$

Bài 34. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai đường thẳng (d_1) : 4x - 3y - 12 = 0 và (d_2): 4x + 3y - 12 = 0. Tìm toạ độ tâm và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác có 3 cạnh nằm trên (d_1), (d_2), trục Oy.

Giải

- Gọi A là giao của $d_1,d_2\Rightarrow A:\begin{cases}4x-3y-12=0\\4x+3y-12=0\end{cases}\Leftrightarrow A(3;0)\in Ox$

- Vì (BC) thuộc Oy cho nên gọi B là giao của d_1 với Oy : cho x=0 suy ra y=-4 , B(0;-4) và C là giao của d_2 với Oy : C(0;4) . Chứng tỏ B,C đối xứng nhau qua Ox , mặt khác A nằm trên Ox vì vậy tam giác ABC là tam giác cân đỉnh A . Do đó tâm I đường tròn nội tiếp tam giác thuộc Ox suy ra I(a;0).

- Theo tính chất phân giác trong : $\frac{IA}{IO}=\frac{AC}{AO}=\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{IA+IO}{IO}=\frac{5+4}{4}\Leftrightarrow\frac{OA}{IO}=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow IO=\frac{4OA}{9}=\frac{4.3}{9}=\frac{4}{3}$. Có nghĩa là I($\frac{4}{3}$;0)

- Tính r bằng cách : $S=\frac{1}{2}BC.OA=\frac{1}{2}.5.3=\frac{15}{2}=\frac{1}{2}\frac{(AB+BC+CA)}{r}=\frac{1}{2}\frac{(5+8+5)}{r}\Rightarrow r=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}$.

Bài 35. Trong mặt phẳng toạ đ ộ Oxy cho điểm C(2;-5) và đường thẳng : $\Delta: 3x-4y+4=0$. Tìm trên Δ hai điểm A và B đối xứng nhau qua I(2;5/2) sao cho diện tích tam giác ABC bằng15

Giải

- Nhận xét I thuộc Δ, suy ra A thuộc Δ : A(4t;1+3t) . Nếu B đối xứng với A qua I thì B có tọa độ B(4-4t;4+3t) $\Rightarrow AB=\sqrt{16(1-2t)^2+9(1-2t)^2}=5|1-2t|$
- Khoảng cách từ C(2;-5) đến Δ bằng chiều cao của tam giác ABC : $=\frac{|6+20+4|}{5}=6$
- Từ giả thiết : $S=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}5.|1-2t|.6=15 \Leftrightarrow |1-2t|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \to A(0;1), B(4;4) \\ t=1 \to A(4;4), B(0;1) \end{array}\right.$

Bài 36. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho elíp $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và hai điểm A(3;-2) , B(-3;2) Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Giải

- A,B có hoành độ là hoành độ của 2 đỉnh của 2 bán trục lớn của (E) , chúng nằm trên đường thẳng y-2=0 . C có hoành độ và tung độ dương thì C nằm trên cung phần tư thứ nhất
- Tam giác ABC có AB=6 cố định . Vì thế tam giác có diện tích lớn nhất khi khoảng cách từ C đến AB lớn nhất .
- Dễ nhận thấy C trùng với đỉnh của bán trục lớn (3;0)

Bài 37. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC biết A(2; - 3), B(3; - 2), có diện tích bằng $\frac{3}{2}$ và trọng tâm thuộc đ- ờng thẳng Δ: 3x — y — 8 = 0. Tìm tọa độ đỉnh C.

Giải

- Do G thuộc Δ suy ra G(t;3t-8). (AB) qua A(2;-3) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1;1)$, cho nên (AB) : $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{1} \Leftrightarrow x-y-5=0$. Gọi M là trung điểm của AB : M$\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$.
- Ta có : $\overrightarrow{GM}=\left(\frac{5}{2}-t;-\frac{5}{2}-3t+8\right)=\left(\frac{5}{2}-t;\frac{11}{2}-3t\right)$. Giả sử C$(x_0;y_0)$, theo tính chất trọng tâm ta có : $\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0-t=-2\left(\frac{5}{2}-t\right) \\ y_0-3t+8=-2\left(\frac{11}{2}-3t\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-5+2t \\ y_0=9t-19 \end{cases} \Rightarrow C(2t-5;9t-19)(1)$
- Ngoài ra ta còn có : AB=$\sqrt{2}$, $h(C,\Delta)=\frac{|3(2t-5)-(9t-19)-8|}{\sqrt{10}}=\frac{|4-3t|}{\sqrt{10}}$
- Theo giả thiết : $S=\frac{1}{2}AB.h(C,\Delta)=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{|4-3t|}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|4-3t|=3\sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow 2(4-3t)^2=90 \Leftrightarrow 9t^2-24t-29=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{4-3\sqrt{5}}{3} \Rightarrow C\left(-\dfrac{7+6\sqrt{5}}{3};-7-9\sqrt{5}\right) \\ t=\dfrac{4+3\sqrt{5}}{3} \Rightarrow C=\left(\dfrac{6\sqrt{5}-7}{3};9\sqrt{5}-7\right) \end{array}\right.$$

Bài 38. Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ và đ- ờng thẳng Δ:3x + 4y =12. Từ điểm M bất kì trên Δ kẻ tới (E) các tiếp tuyến MA, MB. Chứng minh rằng đ- ờng thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định

Giải

Bài 39. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm $I(\frac{1}{2};0)$ Đường thẳng AB có phương trình: x – 2y + 2 = 0, AB = 2AD và hoành độ điểm A âm. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật đó

Giải

- Do A thuộc (AB) suy ra A(2t-2;t) (do A có hoành độ âm cho nên t<1)
- Do ABCD là hình chữ nhật suy ra C đối xứng với A qua I : $C(3-2t;-t)$.
- Gọi d' là đường thẳng qua I và vuông góc với (AB), cắt (AB) tại H thì : $d':\begin{cases} x=\frac{1}{2}+t \\ y=-2t \end{cases}$, và

H có tọa độ là $H(0;1)$. Mặt khác B đối xứng với A qua H suy ra $B(2-2t;2-t)$.

- Từ giả thiết : AB=2AD suy ra AH=AD , hay AH=2IH $\Rightarrow \sqrt{(2-2t)^2+(1-t)^2}=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}$

$$\Leftrightarrow 5t^2-10t+5=4.\frac{5}{4} \Leftrightarrow (t-1)^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t-1=-1 \\ t-1=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=2>1 \end{array}\right.$$

- Vậy khi t = $\frac{1}{2} \Rightarrow A(-2;0), B(2;2), C(3;0), D(-1;-2)$.

* **Chú ý** : Ta còn có cách giải khác nhanh hơn

- Tính $h(I;AB)=\dfrac{\left|\frac{1}{2}-0+2\right|}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, suy ra AD=2 h(I,AB)= $\sqrt{5}$
- Mặt khác : $IA^2=IH^2+\dfrac{(AB)^2}{4}=IH^2+\dfrac{(2AD)^2}{4}=IH^2+AD^2=\dfrac{5}{4}+5=\dfrac{25}{4} \Rightarrow$ IA=IB = $\frac{5}{2}$

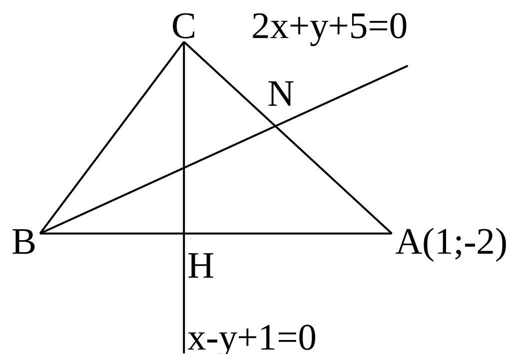
-Do đó A,B là giao của (C) tâm I bán kính IA cắt (AB) . Vậy A,B có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-2y+2=0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow A(-2;0), B(2;2)$ (Do A có hoành độ âm

- Theo tính chất hình chữ nhật suy ra tọa độ của các đỉnh còn lại : C(3;0) và D(-1;-2)

Bài 40. Trong mặt phẳng *Oxy* cho tam giác *ABC* với *A*(1; -2), đường cao $CH: x-y+1=0$, phân giác trong $BN: 2x+y+5=0$ .Tìm toạ độ các đỉnh B,C và tính diện tích tam giác *ABC*

Giải

- Đường (AB) qua A(1;-2) và vuông góc với (CH) suy ra (AB): $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \end{cases}$.



- (AB) cắt (BN) tại B: $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - t \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow t = -5$

Do đó B(-4;3).Ta có :

$k_{AB} = -1, k_{BN} = -2 \Rightarrow \tan\varphi = \left|\dfrac{-1+2}{1+2}\right| = \dfrac{1}{3}$

- Gọi A' đối xứng với A qua phân giác (BN) thì A' nằm trên (AB). Khi đó A' nằm trên d vuông góc với (BN) $\Rightarrow d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \end{cases}$

- d cắt (BN) tại H : $\Rightarrow H: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + t \\ 2x + y + 5 = 0 \end{cases} \rightarrow t = -1 \Leftrightarrow H(-1;-3)$.

- A' đối xứng với A qua H suy ra A'(-3;-4) . (BC) qua B,A' suy ra : $\vec{u} = (1;-7)$

$\Rightarrow (BC): \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 3 - 7t \end{cases}$. (BC) cắt (CH) tại C: $\Rightarrow \begin{cases} x = -4 + t \\ y = 3 - 7t \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow t = \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow C\left(-\dfrac{13}{4};-\dfrac{9}{4}\right)$

- Tính diện tích tam giác ABC :

- Ta có : $\begin{cases} AB = 2\sqrt{5} \\ h(C,AB) = \dfrac{9}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.h(C,AB) = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{5}\dfrac{9}{2\sqrt{2}} = \dfrac{9\sqrt{10}}{4}$

Bài 41. Trong mặt phẳng với hệ trục toạ độ *Oxy* cho hình chữ nhật *ABCD*, có diện tích bằng 12, tâm *I* là giao điểm của đường thẳng $d_1: x - y - 3 = 0$ và $d_2: x + y - 6 = 0$. Trung điểm của một cạnh là giao điểm của d_1 với trục *Ox*. Tìm toạ độ các đỉnh của hình chữ nhật

Giải

- Theo giả thiết , tọa độ tâm I $\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - 3 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{9}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. Gọi M là trung điểm của AD thì M có tọa độ là giao của : x-y-3=0 với Ox suy ra M(3;0). Nhận xét rằng : IM // AB và DC , nói một cách khác AB và CD nằm trên 2 đường thẳng // với d_1 (có $\vec{n} = (1;-1)$.

-A,D nằm trên đường thẳng d vuông góc với $d_1 \Rightarrow d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -t \end{cases}$. Giả sử A $(3+t;-t)$ (1), thì do D đối xứng với A qua M suy ra D(3-t;t) (2) .

- C đối xứng với A qua I cho nên C(6-t;3+t) (3) . B đối xứng với D qua I suy ra B(12+t;3-t).(4)

- Gọi J là trung điểm của BC thì J đối xứng với M qua I cho nên J(6;3). Do đó ta có kết quả là : : $MJ = AB = AD = 3\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A tới d_1: $h(A,d_1) = \dfrac{|2t|}{\sqrt{2}} \Rightarrow S_{ABCD} = 2h(A,d_1).MJ$

$\Leftrightarrow S_{ABCD}=2\frac{|2t|}{\sqrt{2}}3\sqrt{2}=12|t|=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\end{array}\right.$. Thay các giá trị của t vào (1),(2),(3),(4) ta tìm được các đỉnh của hình chữ nhật : $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\to A(3;1),D(4;-1),C(7;2),B(11;4)\\t=1\to A(4;-1),D(2;1),C(5;4),B(13;2)\end{array}\right.$

Bài 42. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hypebol (H): $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ và điểm M(2; 1). Viết phương trình đường thẳng d đi qua M, biết rằng đường thẳng đó cắt (H) tại hai điểm A, B mà M là trung điểm của AB

Giải

- Giải sử d có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)$, qua M(2;1) $\Rightarrow d:\begin{cases}x=2+at\\y=1+bt\end{cases}$

- d cắt (H) tại 2 điểm A,B thì A,B có tọa độ : $\Rightarrow\begin{cases}x=2+at\\y=1+bt\\\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\frac{(2+at)^2}{2}-\frac{(1+bt)^2}{3}=1$

$\Leftrightarrow 3(2+at)^2-2(2+bt)^2=6\Leftrightarrow(3a^2-2b^2)t^2+4(3a-b)t+4=0(1)$

- Điều kiện : $\Leftrightarrow\begin{cases}3a^2-2b^2\neq 0\\\Delta'=4(3a-b)^2-4(3a^2-2b^2)>0\end{cases}$ (*). Khi đó $A(2+at_1;1+bt_1)$, và tọa độ của B : $B(2+at_2;1+bt_2)$, suy ra nếu M là trung điểm của AB thì : 4+a $(t_1+t_2)=4\Leftrightarrow t_1+t_2=0$

- Kết hợp với $t_1t_2=\frac{4}{3a^2-2b^2}\Rightarrow t_1=-t_2=t_2^2=\frac{4}{2b^2-3a^3}\Rightarrow t_2=\pm\frac{2}{\sqrt{2b^2-3a^3}}$

- Áp dụng vi ét cho (1) : $t_1+t_2=\frac{4(b-3a)}{3a^2-2b^2}=0\Leftrightarrow b=3a\Rightarrow d:\frac{x-2}{a}=\frac{y-1}{b}\Leftrightarrow\frac{x-2}{a}=\frac{y-1}{3a}$

- Vậy d : 3(x-2)=(y-1) hay d : 3x-y-5=0 .

Bài 43. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình x+2y-3=0 và hai điểm A(1;0),B(3;-4). Hãy tìm trên đường thẳng Δ một điểm M sao cho : $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ là nhỏ nhất

Giải

- D M $\in\Delta\Rightarrow M(3-2t;t)$ có nên ta có : $\overrightarrow{MA}=(2t-2;-t),3\overrightarrow{MB}=(6t;-3t-12)$. Suy ra tọa độ của $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(8t;-4t-14)\Rightarrow\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(8t)^2+(4t+14)^2}$.

- Vậy : f(t) = $\sqrt{(8t)^2+(4t+14)^2}=\sqrt{80t^2+112t+196}$. Xét g(t)=$80t^2+112t+196$, tính đạo hàm g'(t)= 160t+112. g'(t)=0 khi $t=-\frac{112}{80}=-\frac{51}{80}\Leftrightarrow g\left(-\frac{51}{80}\right)=\frac{15.169}{80}=196$

- Vậy min $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{196}=14$, đạt được khi t=$-\frac{51}{80}$ và $M\left(-\frac{131}{40};-\frac{51}{80}\right)$

Bài 44. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường tròn : (C_1): $x^2+y^2=13$ và $(C_2):(x-6)^2+y^2=25$ cắt nhau tại A(2;3).Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cắt $(C_1),(C_2)$ theo hai dây cung có độ dài bằng nhau

Giải

- Từ giả thiết : $(C_1): I=(0;0), R=\sqrt{13}.(C_2); J(6;0), R'=5$

- Gọi đường thẳng d qua A(2;3) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b) \Rightarrow d: \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \end{cases}$

- d cắt (C_1) tại A, B : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \\ x^2+y^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\left(a^2+b^2\right)t^2+2(2a+3b)t\right]=0 \to t=-\dfrac{2a+3b}{a^2+b^2}$

$\Leftrightarrow B\left(\dfrac{b(2b-3a)}{a^2+b^2};\dfrac{a(3a-2b)}{a^2+b^2}\right)$. Tương tự d cắt (C_2) tại A,C thì tọa độ của A,C là nghiệm của hệ : $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2+at \\ y=3+bt \\ (x-6)^2+y^2=25 \end{cases} \to t=\dfrac{2(4a-3b)}{a^2+b^2} \Leftrightarrow C\left(\dfrac{10a^2-6ab+2b^2}{a^2+b^2};\dfrac{3a^2+8ab-3b^2}{a^2+b^2}\right)$

- Nếu 2 dây cung bằng nhau thì A là trung điểm của A,C . Từ đó ta có phương trình :

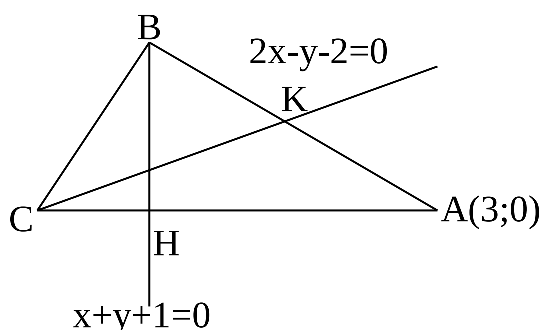
$\Leftrightarrow \dfrac{\left(2b^2-3ab\right)}{a^2+b^2}+\dfrac{10a^2-6ab+2b^2}{a^2+b^2}=4 \Leftrightarrow 6a^2-9ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \to; d: \begin{cases} x=2 \\ y=3+t \end{cases} \\ a=\dfrac{3}{2}b \to \vec{u}=\left(\dfrac{3}{2}b;b\right) // \vec{u'}=(3;2) \end{array}\right.$

Suy ra : $\to d: \begin{cases} x=2+3t \\ y=3+2t \end{cases}$. Vậy có 2 đường thẳng : d: x-2=0 và d': 2x-3y+5=0

Bài 45. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC biết A(3;0), đường cao từ đỉnh B có phương trình x+y+1=0 trung tuyến từ đỉnh C có phương trình : 2x-y-2=0 . Viết phường trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Giải

- Đường thẳng d qua A(3;0) và vuông góc với (BH) cho nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1)$ do đó d : $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \end{cases}$. Đường thẳng d cắt (CK) tại C : $\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ 2x-y-2=0 \end{cases} \to t=-4 \Leftrightarrow C(-1;-4)$



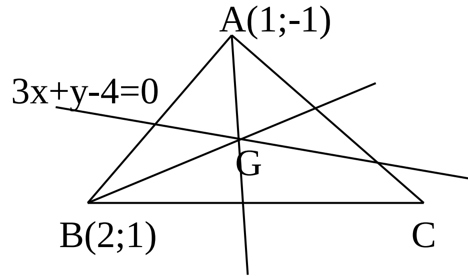
- Vì K thuộc (CK) : K(t;2t-2) và K là trung điểm của AB cho nên B đối xứng với A qua K suy ra B(2t-3;4t-4) . Mặt khác K lại thuộc (BH) cho nên : (2t-3)+(4t-4)+1=0 suy ra t=1 và tạo độ B(-1;0) . Gọi (C) : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0\left(a^2+b^2-c=R^2>0\right)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Cho (C) qua lần lượt A,B,C ta được hệ : $\begin{cases} 9-6a+c=0 \\ 4+4a+c=0 \\ 5+2a+8b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=0 \\ c=-6 \end{cases}$

- Vậy (C) : $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{25}{4}$

Bài 46. Trong mặt phẳng Oxy , cho tam giác ABC biết A(1;-1) ,B(2;1), diện tích bằng $\frac{11}{2}$ và trọng tâm G thuộc đường thẳng d : 3x+y-4=0 . Tìm tọa độ đỉnh C ?

Giải

- Nếu G thuộc d thì G(t;4-3t). Gọi C($x_0;y_0$) . Theo tính chất trọng tâm : $\begin{cases} t=\frac{1+2+x_0}{3} \\ 4-3t=\frac{y_0}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=3t-3 \\ y_0=12-9t \end{cases}$



Do đó C(3t-3;12-9t).

-Ta có :

$\overrightarrow{AB}=(1;2)\Rightarrow \begin{cases} (AB): \frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2} \leftrightarrow 2x-y-3=0 \\ AB=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5} \end{cases}$

- h(C,AB)= $\frac{|2(3t-3)-(12-9t)-3|}{\sqrt{5}}=\frac{|15t-21|}{\sqrt{5}}$. Do đó : $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.h(C,AB)\Rightarrow$

$S=\frac{1}{2}\sqrt{5}\frac{|15t-21|}{\sqrt{5}}=\frac{|15t-21|}{2}=\frac{11}{2}\Leftrightarrow |15t-21|=11\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{32}{15} \\ t=\frac{20}{15} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{32}{15}\rightarrow C=\left(\frac{17}{5};-\frac{26}{5}\right) \\ t=\frac{4}{3}\rightarrow C(1;0) \end{array}\right.$

Bài 47. Trong mặt phẳng Oxy , cho hình vuông có đỉnh (-4;5) và một đường chéo có phương trình : 7x-y+8=0 . Viết phương trình chính tắc các cạnh hình vuông

Giải

- Gọi A(-4;8) thì đường chéo (BD): 7x-y+8=0. Giả sử B(t;7t+8) thuộc **(**BD**)**.
- Đường chéo (AC) qua A(-4;8) và vuông góc với (BD) cho nên có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(7;-1)\Rightarrow(AC):\begin{cases} x=-4+7t \\ y=5-t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x+4}{7}=\frac{y-5}{-1}\Leftrightarrow x+7y-39=0$. Gọi I là giao của (AC) và (BD) thì tọa độ của I là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x=-4+7t \\ y=5-t \\ 7x-y+8=0 \end{cases} \rightarrow t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{9}{2}\right)\Leftrightarrow C(3;4)$
- Từ B(t;7t+8) suy ra : $\overrightarrow{BA}=(t+4;7t+3),\overrightarrow{BC}=(t-3;7t+4)$. Để là hình vuông thì BA=BC :

Và BAvuông góc với BC $\Leftrightarrow (t+4)(t-3)+(7t+3)(7t+4)=0\Leftrightarrow 50t^2+50t=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0\rightarrow B(0;8) \\ t=-1\rightarrow B(-1;1) \end{array}\right.$. Tìm tọa độ của D đối xứng với B qua I $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(0;8)\rightarrow D(-1;1) \\ B(-1;1)\rightarrow D(0;8) \end{array}\right.$

- Từ đó : (AB) qua A(-4;5) có $\overrightarrow{u_{AB}}=(4;3)\rightarrow(AB):\frac{x+4}{4}=\frac{y-5}{3}$

(AD) qua A(-4;5) có $\overrightarrow{u_{AD}}=(3;-4)\rightarrow(AB):\frac{x+4}{3}=\frac{y-5}{-4}$

(BC) qua B(0;8) có $\overrightarrow{u_{BC}}=(3;-4)\Rightarrow(BC):\frac{x}{3}=\frac{y-8}{-4}$

(DC) qua D(-1;1) có $\overrightarrow{u_{DC}}=(4;3)\Rightarrow(DC):\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{3}$

* **Chú ý** : Ta còn cách giải khác

- (BD) : $y=7x+8$, (AC) có hệ số góc $k=-\frac{1}{7}$ và qua A(-4;5) suy ra (AC): $y=\frac{x}{7}+\frac{31}{7}$.

-Gọi I là tâm hình vuông : $\Rightarrow\begin{cases}x_A+x_C=2x_I\\ y_A+y_C=2y_I\\ y_I=7x_I+8\\ y_C=-\frac{x_C}{7}+\frac{31}{7}\end{cases}\Rightarrow C(3;4)$

- Gọi (AD) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b),(BD):\vec{v}=(1;7)\Rightarrow a+7b=\vec{u}\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos 45^0$

$\Leftrightarrow a+7b=5\sqrt{a^2+b^2}$. Chọn a=1, suy ra $b=\frac{3}{4}\Rightarrow(AD):y=\frac{3}{4}(x+4)+5=\frac{3}{4}x+8$

Tương tự : $(AB):y=-\frac{4}{3}(x+4)+5=-\frac{4}{3}x-\frac{1}{3},(BC):y=\frac{3}{4}(x-3)+4=\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ và đường thẳng (DC): $y=-\frac{4}{3}(x-3)+4=-\frac{4}{3}x+8$

Bài 48. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho điểm E(-1;0) và đường tròn (C): $x^2+y^2-8x-4y-16=0$.
Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm E cắt (C) theo dây cung MN có độ dài ngắn nhất.

Giải

- $(C):(x-4)^2+(y-2)^2=36\Rightarrow I(4;2),R=6$
- Nhận xét : P/(M,C)=1+8-16=-7<0 suy ra E nằm trong (C)
- Gọi d là đường thẳng qua E(-1;0) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)\Rightarrow d:\begin{cases}x=-1+at\\ y=bt\end{cases}$
- Đường thẳng d cắt (C) tại 2 điểm M,N có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+at\\ y=bt\\ (x-4)^2+(y-2)^2=36\end{cases}\rightarrow(a^2+b^2)t^2-2(5a+2b)t-7=0.\ (1)$$

- Gọi M(-1+at;bt),N(-1+at';bt') với t và t' là 2 nghiệm của (1). Khi đó độ dài của dây cung MN $=\sqrt{a^2(t-t')^2+b^2(t-t')^2}=|t-t'|\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{2\sqrt{18a^2+20ab+11b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

- $\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{18+20\left(\frac{b}{a}\right)+11\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{18+20t+11t^2}{1+t^2}}\left(t=\frac{b}{a}\right)$. Xét hàm số f(t)=$\frac{18+20t+11t^2}{1+t^2}$

- Tính đạo hàm f'(t) cho bằng 0 , lập bảng biến thiên suy ra GTLN của t , từ đó suy ra t (tức là suy ra tỷ số a/b)). Tuy nhiên cách này dài

* **Chú ý** : Ta sử dụng tính chất dây cung ở lớp 9 : Khoảng cách từ tâm đến dây cung càng nhỏ thì dây cung càng lớn

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng d bất kỳ qua E(-1;0). Xét tam giác vuông HIE (I là đỉnh) ta luôn có : $IH^2=IE^2-HE^2\le IE^2\Rightarrow IH\le IE$. Do đó IH lớn nhất khi HE=0 có nghĩa là H trùng với E . Khi đó d cắt (C) theo dây cung nhỏ nhất . Lúc này d là

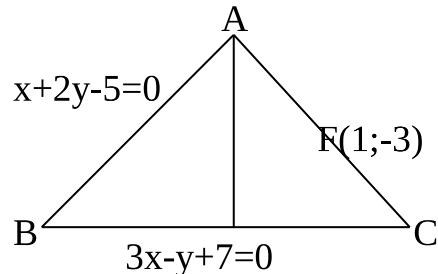
đường thẳng qua E và vuông góc với IE cho nên d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IE}=(5;2)$, do vậy d: 5(x+1)+2y=0 hay : 5x+2y+5=0 .

Bài 49. Cho tam giác ABC cân tại A, biết phương trình đường thẳng AB, BC lần lượt là: x + 2y – 5 = 0 và 3x – y + 7 = 0. Viết phương trình đường thẳng AC, biết rằng AC đi qua điểm F(1; - 3).

Giải

- Ta thấy B là giao của (AB) và (BC) cho nên tọa độ

B là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x+2y-5=0 \\ 3x-y+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{9}{7} \\ y=-\dfrac{22}{7} \end{cases}$



$\Leftrightarrow B\left(-\frac{9}{7};-\frac{22}{7}\right)$. Đường thẳng d' qua A vuông góc với (BC) có $\vec{u}=(3;-1)\Rightarrow \vec{n}=(1;3)\Leftrightarrow k=-\frac{1}{3}$. (AB) có $k_{AB}=-\frac{1}{2}$. Gọi (AC) có hệ số góc là k ta có

phương trình : $\left|\dfrac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}}\right|=\left|\dfrac{k+\frac{1}{3}}{1-\frac{k}{3}}\right| \Leftrightarrow \dfrac{1}{5}=\dfrac{|3k+1|}{|3-k|}\Leftrightarrow |15k+5|=|3-k| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 15k+5=3-k \\ 15k+5=k-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=-\dfrac{1}{8} \\ k=-\dfrac{4}{7} \end{array}\right.$

- Với k=- $\frac{1}{8}\Rightarrow (AC): y=-\frac{1}{8}(x-1)-3 \Leftrightarrow x+8y+23=0$

- Với k= $\frac{4}{7}\Rightarrow (AC): y=-\frac{4}{7}(x+1)-3 \Leftrightarrow 4x+7y+25=0$

Bài 50. Trong mặt phẳng Oxy, hãy xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC vuông cân tại A. Biết rằng cạnh huyền nằm trên đường thẳng d: x + 7y – 31 = 0, điểm N(7;7) thuộc đường thẳng AC, điểm M(2;-3) thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB

Giải

- Gọi $A(x_0;y_0)\Rightarrow \overrightarrow{MA}=(x_0-2;y_0+3),\overrightarrow{NA}=(x_0-7;y_0-7)$.

- Do A là đỉnh của tam giác vuông cân cho nên AM vuông góc với AN hay ta có :

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NA}=0\Leftrightarrow (x_0-2)(x_0-7)+(y_0+3)(y_0-7)=0\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2-9x_0-4y_0-7=0$

- Do đó A nằm trên đường tròn (C) : $(x_0-3)^2+(y_0-2)^2=20$

- Đường tròn (C) cắt d tại 2 điểm B,C có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=20 \\ x+7y-31=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=31-7y \\ (28-7y)^2+(y-2)^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=31-7y \\ 50y^2-396y+768=0 \end{cases}$

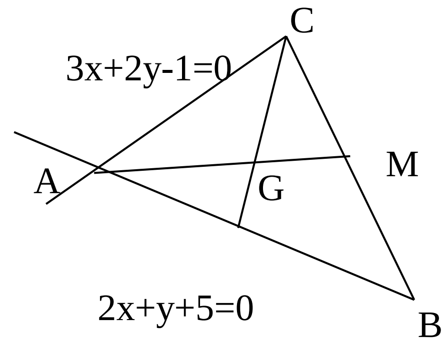
- Do đó ta tìm được : $y=\frac{198-2\sqrt{201}}{50}=\frac{99-\sqrt{201}}{25}; y=\frac{99+\sqrt{201}}{25}$, tương ứng ta tìm được các giá trị của x : $x=\frac{82+7\sqrt{201}}{25}; x=\frac{82-7\sqrt{201}}{25}$. Vậy : $A\left(\frac{82+7\sqrt{201}}{25};\frac{99-\sqrt{201}}{25}\right)$ và tọa độ của điểm $A\left(\frac{82-7\sqrt{201}}{25};\frac{99+\sqrt{201}}{25}\right)$

Bài 51. Trong mặt phẳng Oxy , cho hai đường thẳng d_1: 2x + y + 5 = 0, d_2: 3x + 2y – 1 = 0 và điểm G(1;3). Tìm tọa độ các điểm B thuộc d_1 và C thuộc d_2 sao cho tam giác ABC nhận điểm G làm trọng tâm. Biết A là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2

Giải

- Tìm tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases}2x+y+5=0\\3x+2y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-11\\y=17\end{cases} \Rightarrow A(-11;17)$

- Nếu C thuộc $d_1 \Rightarrow C(t;-2t-5)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(1+2m;-1-3m)$



- Theo tính chất trọng tâm của tam giác ABC khi G là trọng tâm thì : $\begin{cases}\dfrac{t+2m-10}{3}=1\\ \dfrac{11-2t-3m}{3}=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t+2m=13\\2t+3m=2\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t=13-2m\\2(13-2m)+3m=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=13-2m\\m=24\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t=-35\\m=24\end{cases}$

- Vậy ta tìm được : C(-35;65) và B(49;-53).

Bài 52. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 – 6x + 2y – 15 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng d: 3x – 22y – 6 = 0, sao cho từ điểm M kẻ được tới (C) hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) mà đường thẳng AB đi qua điểm C (0;1).

Giải

- (C) : $(x-3)^2+(y+1)^2=25$, có I(3;-1) và R=5 .

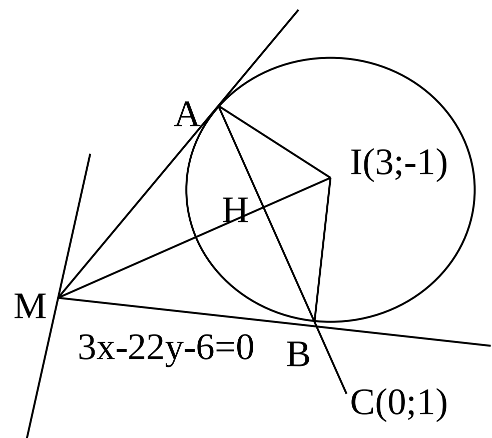
- Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ là 2 tiếp điểm của 2 tiếp tuyến kẻ từ M .

- Gọi $M(x_0;y_0)\in d \Rightarrow 3x_0-22y_0-6=0$ (*)

- Hai tiếp tuyến của (C) tại A,B có phương trình là :

- $(x_1-3)(x-3)+(y_1+1)(y+1)=25 \quad (1)$ và :

- $(x_2-3)(x-3)+(y_2+1)(y+1)=25 \quad (2)$



- Để 2 tiếp tuyến trở thành 2 tiếp tuyến kẻ từ M thì 2 tiếp tuyến phải đi qua M ;

- $(x_1-3)(x_0-3)+(y_1+1)(y_0+1)=25 \quad (3)$ và

- $(x_2-3)(x_0-3)+(y_2+1)(y_0+1)=25 \quad (4)$

Từ (3) và (4) chứng tỏ (AB) có phương trình là : $(x_0-3)(x-3)+(y_0+1)(y+1)=25 \quad (5)$

- Theo giả thiết thì (AB) qua C(0;1) suy ra :

$$-3(x_0-3)+2(y_0+1)=25 \Leftrightarrow -3x_0+2y_0-14=0(6)$$

- Kết hợp với (*) ta có hệ : $\begin{cases}3x_0-22y_0-6=0\\-3x_0+2y_0-14=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y_0=-1\\x_0=-\dfrac{16}{3}\end{cases} \Leftrightarrow M\left(-\dfrac{16}{3};-1\right)$

Bài 53. Trong mặt phẳng Oxy : Cho hai điểm A(2 ; 1), B(- 1 ; - 3) và hai đường thẳng d_1: x + y + 3 = 0; d_2 : x – 5y – 16 = 0. Tìm tọa độ các điểm C,D lần lượt thuộc d_1 và d_2 sao cho tứ giác ABCD là hình bình hành.

Giải

- Trường hợp : Nếu AB là một đường chéo

+/ Gọi I($\left(\frac{1}{2};-1\right)$, đường thẳng qua I có hệ số góc k suy ra d: y=k(x-1/2)-1

+/ Đường thẳng d cắt d_1 tại C $\Leftrightarrow \begin{cases} y=k\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ x+y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{k-4}{2(k+1)} \\ y=-\frac{7k+2}{2(k+1)} \end{cases}$

$\Leftrightarrow C\left(\frac{k-4}{2(k+1)};-\frac{7k+2}{2(k+1)}\right)$. Tương tự d cắt d_2 tại B : $\begin{cases} y=k\left(x-\frac{1}{2}\right)-1 \\ x-5y-16=0 \end{cases}$

- Từ đó suy ra tọa độ của B . Để ABCD là hình bình hành thì : AB=CD .Sẽ tìm được k

* Cách khác :

- Gọi C(t;-t-3) thuộc d_1 , tìm B đối xứng với C qua I suy ra D (1-t;t+1)
- Để thỏa mãn ABCD là hình bình hành thì D phải thuộc d_2 : $\Leftrightarrow 1-t-5(t+1)-16=0$

Suy ra t=-$\frac{10}{3}$ và D$\left(\frac{13}{3};-\frac{7}{3}\right)$ và C$\left(-\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$

- Trường hợp AB là một cạnh của hình bình hành .

+/ Chọn C (t;-t-3) thuộc d_1 và D (5m+16;m) thuộc d_2

+/ Để ABCD là hình bình hành thì : $\begin{cases} \text{AC=BD} \\ \text{AB //CD} \end{cases}$

+/ Ta có

$:\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(2-t)^2+(t+4)^2}=\sqrt{(5m+17)^2+(m+3)^2} \\ \frac{5m-t+16}{3}=\frac{m+t+3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-t)^2+(t+4)^2=(5m+17)^2+(m+3)^2 \\ 17m-7t+55=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2+2t=13m^2+88m+89=0 \\ t=\frac{17m+55}{7} \end{cases}$. Giải hệ này ta tìm được m và t , thay vào tọa độ của C và D

Bài 54. Trong mặt phẳng tọa độ độ Oxy, cho tam giác ABC có C(1;2), hai đường cao xuất phát từ A và B lần lượt có phương trình là x + y = 0 và 2x – y + 1 = 0. Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

- (AC) qua C(1;2) và vuông góc với đường cao BK cho nên có :

$$\vec{u}=(2;-1)\Rightarrow(AC):\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}\Leftrightarrow x+2y-5=0$$

- (AC) cắt (AH) tại A : $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{5} \\ y=\frac{11}{5} \end{cases} \Leftrightarrow A\left(\frac{3}{5};\frac{11}{5}\right) \Rightarrow AC=\frac{\sqrt{5}}{5}$

- (BC) qua C(1;2) và vuông góc với (AH) suy ra $\overrightarrow{u_{BC}}=(1;1)\Rightarrow(BC):\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \end{cases}$

- (BC) cắt đường cao (AH) tại B $\Leftrightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ x+y=0 \end{cases} \rightarrow t=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow B\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

- Khoảng cách từ B đến (AC) : $\frac{\left|-\frac{1}{2}+1-5\right|}{\sqrt{5}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}\Rightarrow S=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{5}.\frac{9}{2\sqrt{5}}=\frac{9}{20}$

Bài 55. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm F_1(- 4; 0), F_2(4;0) và điểm A(0;3).
a) Lập phương trình chính tắc của elip (E) đi qua điểm A và có hai tiêu điểm F_1, F_2 .
b) Tìm tọa độ của điểm M thuộc (E) sao cho MF_1 = 3MF_{2_1}

Giải

- Giả sử (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1) . Theo giả thiết thì : c=4 $\Leftrightarrow c^2=16=a^2-b^2\,(2)$

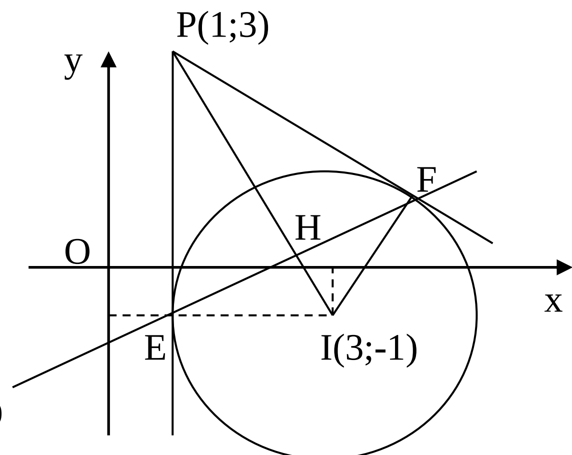
- (E) qua A(0;3) suy ra : $\frac{9}{b^2}=1\Leftrightarrow b^2=9$, thay vào (2) ta có $a^2=25\Rightarrow(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

- M thuộc (E) $\Rightarrow M(x_0;y_0)\leftrightarrow\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1(2)$. Theo tính chất của (E) ta có bán kính qua tiêu $MF_1=5+\frac{4}{5}x_0, MF_2=5-\frac{4}{5}x_0\Rightarrow MF_1=3MF_2\Leftrightarrow 5+\frac{4}{5}x_0=3\left(5-\frac{4}{5}x_0\right)\Rightarrow x_0=\frac{25}{8}$. Thay vào (2) ta có $y_0^2=\frac{551}{8^2}\Rightarrow y_0=\pm\frac{\sqrt{551}}{8}$

Bài 56. Trong mp Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 – 6x + 2y + 6 = 0$ và điểm P(1;3).
a.Viết phương trình các tiếp tuyến PE, PF của đường tròn (C), với E, F là các tiếp điểm.
b.Tính diện tích tam giác PEF.

Giải

- (C): $(x-3)^2+(y+1)^2=4\Rightarrow I(3;-1),R=2$



- Giả sử đường thẳng qua P có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)\Rightarrow d:a(x-1)+b(y-3)=0$
Hay : ax+by-(a+3b)=0 (*).
- Để d là tiếp tuyến của (C) thì khoảng cách từ tâm I đến d bằng bán kính :

$$\Leftrightarrow\frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow\frac{|2a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$$

$$\Leftrightarrow(a-2b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 4ab-3b^2=0$$

$$\Leftrightarrow b(4a-3b)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\rightarrow a(x-1)=0\leftrightarrow x-1=0\\ b=\frac{4}{3}a\rightarrow a(x-1)+\frac{4}{3}a(y-3)=0\leftrightarrow 3x+4y-6=0\end{array}\right.$$

-Ta có : PI=2$\sqrt{5}$, PE=PF=$\sqrt{PI^2-R^2}=\sqrt{20-4}=4$.
Tam giác IEP đồng dạng với IHF suy ra :

$$\frac{\text{IF}}{\text{IH}}=\frac{EP}{EH}=\frac{IP}{IE}=\frac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}\Rightarrow IH=\frac{\text{IF}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}},EH=\frac{EP}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow PH=PI-IH=2\sqrt{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{5}}\Leftrightarrow S_{EPF}=\frac{1}{2}\text{EF.PH}=\frac{1}{2}\frac{8}{\sqrt{5}}\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{32}{5}$$

Bài 57. Trong mpOxy, cho 2 đường thẳng d_1: 2x + y – 1 = 0, d_2: 2x – y + 2 = 0. Viết pt đường tròn (C) có tâm nằm trên trục Ox đồng thời tiếp xúc với d_1 và d_2.

Giải

- Gọi I(a;0) thuộc Ox . Nếu (C) tiếp xúc với 2 đường thẳng thì : $\begin{cases} h(I,d_1)=h(I,d_2) \\ h(I,d_1)=R \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|2a-1|}{\sqrt{5}}=\frac{|2a+2|}{\sqrt{5}} (1) \\ R=\frac{|2a-1|}{\sqrt{5}} \quad (2) \end{cases}$. Từ (1) : a=$\frac{1}{4}$, thay vào (2) : R=$\frac{\sqrt{5}}{10} \Leftrightarrow (C): \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{5}{100}$

Bài 58. Trong mpOxy, cho 2 đường thẳng d_1: 2x – 3y + 1 = 0, d_2: 4x + y – 5 = 0. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2. Tìm điểm B trên d_1 và điểm C trên d_2 sao cho ΔABC có trọng tâm G(3; 5).

Giải

- Tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+y-5=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{7}{8};\frac{3}{2}\right)$

- $B\in d_1 \Rightarrow B(1+2t;1-3t), C\in d_2 \Rightarrow C(m;5-4m)$.

Tam giác ABC nhận G(3;5) làm trọng tâm : $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+2t+m+\frac{7}{8}=9 \\ 1-3t+5-4m+\frac{3}{2}=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t+m=\frac{57}{8} \\ 3t+4m=-\frac{15}{2} \end{cases}$

Giải hệ trên suy ra : $\begin{cases} t=\frac{31}{5} \to B\left(\frac{67}{5};-\frac{88}{5}\right) \\ m=-\frac{207}{40} \to C\left(-\frac{207}{40};\frac{257}{10}\right) \end{cases}$

Bài 59. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$. Lập pt đường tròn (C’) đối xứng với (C) qua đường thẳng Δ: x – 2 = 0

Giải

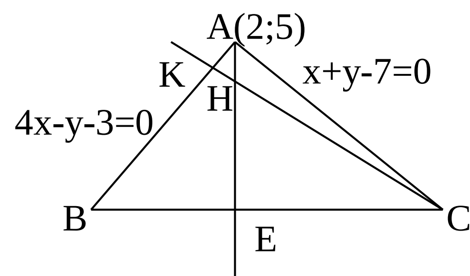
Ta có (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=2 \leftrightarrow I(1;2), R=\sqrt{2}$

- Gọi J là tâm của (C') thì I và J đối xứng nhau qua d : x=2 suy ra J(3;2) và (C) có cùng bán kính R . Vậy (C'): $(x-3)^2+(y-2)^2=2$ đối xứng với (C) qua d .

Bài 60. Trong mpOxy, cho ΔABC có trục tâm H$\left(\frac{13}{5};\frac{13}{5}\right)$, pt các đường thẳng AB và AC lần lượt là: 4x – y – 3 = 0, x + y – 7 = 0. Viết pt đường thẳng chứa cạnh BC.

Giải

- Tọa độ A là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 4x-y-3=0 \\ x+y-7=0 \end{cases}$



Suy ra : A(2;5). $\Rightarrow \overrightarrow{HA}=\left(-\frac{3}{5};\frac{12}{5}\right) // \vec{u}(1;-4)$. Suy ra (AH) có véc tơ chỉ phương $\vec{u}(1;-4)$. (BC) vuông góc với (AH) cho nên (BC) có $\vec{n}=\vec{u}(1;-4)$ suy ra (BC): x-4y+m=0 (*).

- C thuộc (AC) suy ra C(t;7-t) và $\overrightarrow{CH}=\left(\frac{13}{5}-t;t-\frac{22}{5}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_{AB}}=(1;4)\perp\overrightarrow{CH}$. Cho nên ta

có : $\frac{13}{5}-t+4\left(t-\frac{22}{5}\right)=0\to t=5\Leftrightarrow C(5;2)$.

- Vậy (BC) qua C(5;2) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-4)\Rightarrow(BC):(x-5)-4(y-2)=0$

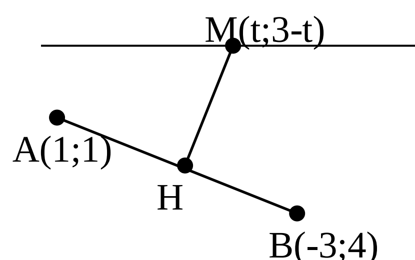
(BC): $\Leftrightarrow x-4y+3=0$

Bài 61. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: x + y – 3 = 0 và 2 điểm A(1; 1), B(–3; 4). Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng AB bằng 1.

Giải

- M thuộc d suy ra M(t;3-t) . Đường thẳng (AB) qua A(1;1) và có véc tơ chỉ phương

$\vec{u}=(4;-3)\Rightarrow(AB):\frac{x-1}{4}=\frac{y-1}{-3}\Leftrightarrow 3x+4y-4=0$



- Theo đầu bài : $\frac{|3t+4(3-t)-4|}{5}=1\Leftrightarrow|-t+8|=5$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\to M(3;0)\\ t=13\to M(13;-10)\end{array}\right.$

<u>* Chú ý :</u>

Đường thẳng d' song song với (AB) có dạng : 3x+4y+m=0 . Nếu d' cách (AB) một khoảng bằng 1 thì h(A,d')=1 $\Leftrightarrow\frac{|3+4+m|}{5}=1$

$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\to d':3x+4y-2=0\\ m=-12\to d':3x+4y-12=0\end{array}\right.$. Tìm giao của d' với d ta tìm được M .

Bài 62. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ΔABC có đỉnh A(4; 3), đường cao BH và trung tuyến CM có pt lần lượt là: 3x – y + 11 = 0, x + y – 1 = 0. Tìm tọa độ các đỉnh B, C

Giải

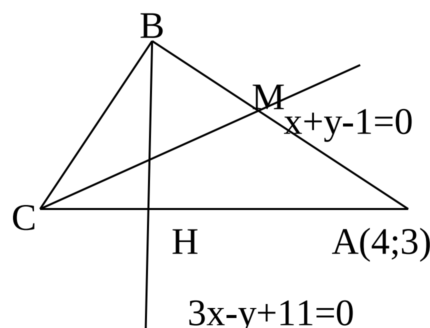
Đường thẳng (AC) qua A(4;3) và vuông góc với (BH) suy ra (AC) : $\begin{cases}x=4+3t\\ y=3-t\end{cases}$

(AC) cắt trung tuyến (CM) tại C : $\begin{cases}x=4+3t\\ y=3-t\\ x+y-1=0\end{cases}\to 2t+6=0\to t=-3\Leftrightarrow C(-5;6)$

- B thuộc (BH) suy ra B(t;3t+11). Do (CM) là trung tuyến cho nên M là trung điểm của AB , đồng thời M thuộc (CM) . $\Rightarrow M\left(\frac{t+4}{2};\frac{3t+14}{2}\right)$

$M\in(CM)\Rightarrow\frac{t+4}{2}+\frac{3t+14}{2}-1=0\Rightarrow t=-4$.

Do đó tọa độ của B(-4;-1) và M(0;1).



Bài 63. Trong mpOxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ và đường thẳng d: x – $\sqrt{2}$ y + 2 = 0. Đường thẳng d cắt elip (E) tại 2 điểm B, C. Tìm điểm A trên elip (E) sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

Giải

-Do đường thẳng d cố định cho nên B,C cố định , có nghĩa là cạnh đáy BC của tam giác ABC cố định .

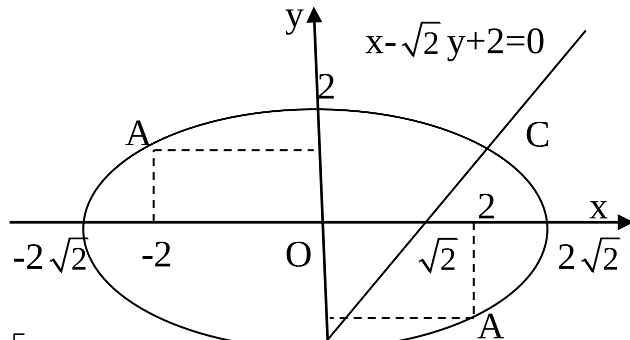
- Diện tích tam giác lớn nhất khi khoảng cách từ A (trên E) là lớn nhất
- Phương trình tham số của (E) :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\sin t \\ y = 2\cos t \end{cases} \Rightarrow A\left(2\sqrt{2}\sin t; 2\cos t\right)$$

- Ta có :

$$\Leftrightarrow h(A,d) = \frac{\left|2\sqrt{2}\sin t - 2\sqrt{2}\text{cost} + 2\right|}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left|2\sqrt{2}\left(\sin t - \text{cost}\right)\right|}{\sqrt{3}} = \frac{\left|4\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sqrt{3}} \le \frac{4}{\sqrt{3}}$$



. Dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| = 1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \rightarrow x = -2, y = \sqrt{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \rightarrow x = 2, y = -\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Nhận xét : Thay tọa độ 2 điểm A tìm được ta thấy điểm $A\left(-2;\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn .

Bài 64. Trong hệ trục 0xy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-8x+12=0$ và điểm E(4;1). Tìm toạ độ điểm M trên trục tung sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C), với A,B là các tiếp điểm sao cho E thuộc đường thẳng AB

Giải

- Đường tròn (C) : $(x-4)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow I(2;0), R = 2$
- Gọi M(0;a) thuộc Oy . $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2) \in (C)$
- Tiếp tuyến tại A và B có phương trình là :

$(x_1-4)(x-4) + y_1 y = 4$, $(x_2-4)(x-4) + y_2 y = 4$

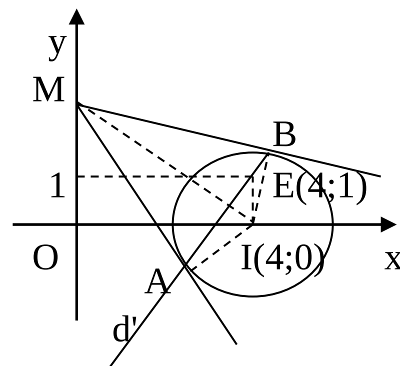
- Để thỏa mãn 2 tiếp tuyến này cùng qua M(0;a)

$\Leftrightarrow (x_1-4)(0-4) + y_1 a = 4$, $(x_2-4)(0-4) + y_1 a = 4$.

Chứng tỏ (AB) có phương trình : -4(x-4)+ay=4

- Nếu (AB) qua E(4;1) : -4(0)+a.1=4 suy ra : a=4

Vậy trên Oy có M(0;4) thỏa mãn .



Bài 65. Cho tam giác ABC có diện tích S=$\frac{3}{2}$, hai đỉnh A(2;-3), B(3;-2) và trọng tâm G của tam giác thuộc đt 3x-y-8=0. Tìm tọa độ đỉnh C

Giải

- Vì G thuộc d suy ra G(t;3t-8) $\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{GA} = (2-t; 5-3t) \\ \overrightarrow{GM} = (x_0 - t; y_0 + 8 - 3t) \end{cases}$. Theo tính chất trọng tâm của tam giác : $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Rightarrow \begin{cases} 2-t = -2x_0 + 2t \\ 5-3t = -2y_0 - 16 + 6t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = 3t - 2 \\ 2y_0 = 9t - 21 \end{cases}$. Theo tính chất trung điểm ta có tọa độ của $C(3t-5; 9t-19)$.

- (AB) qua A(2;-3) có véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1) \Rightarrow (AB): \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{1} \Leftrightarrow x - y - 4 = 0.$

Đồng thời : $AB=\sqrt{2}$. Khoảng cách từ C đến (AB) : $=\frac{|3t-5-9t+19-4|}{\sqrt{2}}=\frac{|10-6t|}{\sqrt{2}}$

- Theo giả thiết :

$$S=\frac{1}{2}AB.h=\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{|10-6t|}{\sqrt{2}}=|5-3t|=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10-6t=-3\\10-6t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{13}{6}\rightarrow C\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)\\t=\frac{7}{6}\rightarrow C\left(-\frac{3}{2};-\frac{7}{2}\right)\end{array}\right.$$

Bài 66. Viết phương trình đường tròn (C) có bán kính R = 2 tiếp xúc với trục hoành và có tâm I nằm trên đường thẳng (d) : x + y – 3 = 0.

Giải

- Tâm I nằm trên d suy ra I(t;3-t) . Nếu (C) tiếp xúc với Ox thì khoảng cách từ I đến Ox bằng bán kính R=2 : $|3-t|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3-t=-2\\3-t=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=5\rightarrow I_1=(5;-2)\\t=1\rightarrow I_2=(1;2)\end{array}\right.$

- Như vậy có 2 đường tròn : $(C_1):(x-5)^2+(y+2)^2=4$, $(C_2):(x-1)^2+(y-2)^2=4$.

Bài 67. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình :

$x^2 + y^2 – 2x – 6y + 6 = 0$.

a. Viết phương trình đường thẳng đi qua M(2 ; 4) cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A, B sao cho M là trung điểm đoạn AB.

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến ấy song song với đường thẳng có phương trình : 2x + 2y – 7 = 0.

c. Chứng tỏ đường tròn (C) và đường tròn (C ’) : $x^2 + y^2 – 4x – 6y + 4 = 0$ tiếp xúc nhau. Viết phương trình tiếp tuyến chung của chúng tại tiếp điểm

Giải

- (C) : $(x-1)^2+(y-3)^2=4\Rightarrow I(1;3),R=2$.

a. Gọi A(x;y) thuộc (C) suy ra $(x-1)^2+(y-3)^2=4\,(1)$, B đối xứng với A qua M suy ra B(4-x;8-y) . Để đảm bảo yêu cầu bài toán thì B thuộc (C) : $(3-x)^2+(5-y)^2=4\,(2)$.

- Từ (1) và (2) ta có hệ : $\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=4\\(3-x)^2+(5-y)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-6y+6=0 & (3)\\x^2+y^2-6x-10y+30=0 & (4)\end{cases}$

- Lấy (3) -(4) ta có phương trình : 4x+4y-24=0 , hay : x+y-6=0 . Đó chính là đường thẳng cần tìm .

b. Gọi d' là đường thẳng // với d nên nó có dạng : 2x+2y+m=0 (*) . Để d' là tiếp tuyến của (C) thì : $\Rightarrow h(I,d')=\frac{|2+6+m|}{\sqrt{8}}=2\Leftrightarrow|m+8|=4\sqrt{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\sqrt{2}-8\\m=-4\sqrt{2}-8\end{array}\right.$

c. (C'): $(x-2)^2+(y-3)^2=9\Rightarrow I'(2;3),R'=3$

- Ta có : II'=1 , R'-R=1 . Chứng tỏ hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau .

- Tìm tọa độ tiếp điểm

: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-3)^2=4\\(x-2)^2+(y-3)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-6y+6=0\\x^2+y^2-4x-6y+4=0\end{cases}\Rightarrow 2x+2=0\Leftrightarrow x=-1$. Thay vào phương trình đầu của hệ : $y^2-6y+9=0\Leftrightarrow(y-3)^2=0\rightarrow y=3\Leftrightarrow M(1;3)$.

- Tiếp tuyến chung qua M và vuông góc với IJ suy ra d': 1(x-1)=0 hay : x-1=0 .

Bài 68. Trong mặt phẳng Oxy cho (E) có phương trình : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

a. Xác định tọa độ các tiêu điểm, độ dài các trục của (E).

b. Chứng minh $OM^2 + MF_1.MF_2$ là một số không đổi với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E) và $M \in (E)$.

c. Tìm các điểm M thuộc (E) thỏa $MF_1 = 2.MF_2$ với F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E).

d. Tìm các điểm $M \in (E)$ nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

Giải

a. (E) có trục dài 2a=6 , trục ngắn : 2b=4 , $c^2=9-4=5 \Leftrightarrow c=\sqrt{5} \Rightarrow F_1\left(-\sqrt{5};0\right), F_2\left(\sqrt{5};0\right)$

b. Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(E)\Rightarrow \frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1(*)$

- Theo công thức bán kính qua tiêu :

$\Rightarrow MF_1=3+\frac{\sqrt{5}}{3}x_0, MF_2=3-\frac{\sqrt{5}}{3}x_0 \Rightarrow MF_1.MF_2=\left(3+\frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)\left(3-\frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)=9-\frac{5}{9}x_0^2$

- Vậy : $OM^2+MF_1MF_2=x_0^2+y_0^2+9-\frac{5}{9}x_0^2=9+\frac{4x_0^2}{9}+y_0^2=9+4\left(\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}\right)=9+4=13$.

c. Như (*) Nếu $MF_1=2MF_2 \Leftrightarrow 3+\frac{\sqrt{5}}{3}x_0=2\left(3-\frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)\Leftrightarrow \sqrt{5}x_0=3 \Leftrightarrow x_0=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

- Từ (*) : $y_0^2=\frac{4}{9}\left(9-x_0^2\right)=\frac{4}{9}\left(9-\frac{9}{5}\right)=\frac{16}{5}\Rightarrow y_0=\pm\frac{4}{\sqrt{5}}\Rightarrow M_1\left(\frac{3}{\sqrt{5}};-\frac{4}{\sqrt{5}}\right), M_2\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$

d. Theo giả thiết : $\overrightarrow{MF_1}\overrightarrow{MF_2}=0$

- $\overrightarrow{MF_1}=\left(x_0+\sqrt{5},y_0\right), \overrightarrow{MF_2}=\left(x_0-\sqrt{5};y_0\right)\Rightarrow \overrightarrow{MF_1}\overrightarrow{MF_2}=\left(x_0^2-5\right)-y_0^2=0 \Leftrightarrow y_0^2=x_0^2-5(1)$

- Kết hợp với (*) ta có hệ : $\begin{cases} y_0^2=x_0^2-5 \\ y_0^2=\frac{4}{9}\left(9-x_0^2\right)\end{cases}\Rightarrow x_0^2-5=\frac{4}{9}\left(9-x_0^2\right)\Leftrightarrow x_0^2=\frac{81}{13}\Rightarrow x_0=\pm\frac{9}{\sqrt{13}}$

- Do đó : $y_0^2=\frac{81}{13}-5=\frac{36}{13}\Leftrightarrow y_0=\pm\frac{6}{\sqrt{13}}$. Như vậy ta có tất cả 4 điểm M nhìn tiêu điểm dưới một góc vuông :

$$M_1\left(-\frac{9}{\sqrt{13}};-\frac{6}{\sqrt{13}}\right), M_2\left(-\frac{9}{\sqrt{13}};\frac{6}{\sqrt{13}}\right), M_3\left(\frac{9}{\sqrt{13}};-\frac{6}{\sqrt{13}}\right), M_4\left(\frac{9}{\sqrt{13}};\frac{6}{\sqrt{13}}\right)$$

Bài 69. Trong mặt phẳng Oxy cho (E) có phương trình : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

a. Xác định tọa độ các tiêu điểm, độ dài các trục của (E).

b. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc (E) ta đều có $2 \le OM \le 3$.

c. Tìm các điểm M thuộc (E) nhìn đoạn F_1F_2 dưới một góc 60°.

Giải

a. Giả sử $M\left(x_0;y_0\right)\in(E)\Rightarrow \frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1 \quad (1)$

- Ta có : $\frac{y_0^2}{4}\ge\frac{y_0^2}{9}\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}\ge\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{9}\Leftrightarrow 1\ge\frac{x_0^2+y_0^2}{9}\Leftrightarrow 9\ge OM^2\Rightarrow OM\le 3$. (1)

- Tương tự : $\frac{x_0^2}{9} \le \frac{x_0^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} \le \frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{4} \Leftrightarrow 1 \le \frac{x_0^2 + y_0^2}{4} \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 \ge 4 \Rightarrow OM^2 \ge 4 \Rightarrow OM \ge 2$

- Tóm lại với mọi M thuộc (E) ta luôn có : $2 \le OM \le 3$. Dấu đẳng thức : . $\left[\begin{array}{l} y_0 = 0, x_0 = \pm 3 \\ x_0 = 0, y_0 = \pm 2 \end{array}\right.$

c. Ta có : $\Rightarrow MF_1 = 3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0, MF_2 = 3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0 \Rightarrow MF_1.MF_2 = \left(3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right) = 9 - \frac{5}{9}x_0^2$

- Theo hệ thức hàm số cos ta có :

$\Leftrightarrow (F_1F_2)^2 = MF_1^2 + MF_1^2 - 2MF_1MF_2cos60^0 = (MF_1 + MF_2)^2 - 3MF_1MF_2$

$\Leftrightarrow (2\sqrt{5})^2 = 6^2 - 3\left(3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)\left(3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right) = 36 - 3\left(9 - \frac{5}{9}x_0^2\right) = 9 + \frac{5}{3}x_0^2$

$\Leftrightarrow 20 = 9 + \frac{5}{3}x_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{33}{5} \Rightarrow x_0 = \pm\frac{\sqrt{165}}{5} \Rightarrow y_0^2 = \frac{4}{9}(9 - x_0^2) = \frac{4}{9}\left(9 - \frac{33}{5}\right) = \frac{4^2 3}{9} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$

- Như vậy : có 4 điểm thỏa mãn .

Bài 70. Trong mặt phẳng Oxy cho (E) có phương trình : $4x^2 + 9y^2 = 36$.

a. . Cho 2 đường thẳng (D) : ax – by = 0 và (D') : bx + ay = 0 ($a^2 + b^2 > 0$). Tìm giao điểm E, F của (D) với (E) và giao điểm P, Q của (D') với (E). Tính diện tích tứ giác EPFQ theo a, b.

b. Chứng minh rằng MPFQ luôn ngoại tiếp m[tj đường tròn cố định ? Viết phương trình đường tròn cố định đó .

c. Cho điểm M(1 ; 1). Viết phương trình đường thẳng đi qua M và cắt (E) tại hai điểm A, B sao cho M là trung điểm của đoạn thẳng AB

Giải

a. Hai đường thẳng (D) và (D') vuông góc nhau .

- (D) giao với (E) tại E,F có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ \text{ax-by=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(\frac{by}{a}\right)^2 + 9y^2 = 36 \\ x = \frac{by}{a} \end{cases}$

$$\Rightarrow E\left(\frac{6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}; \frac{6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right), F\left(\frac{-6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}; \frac{-6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right)$$

- Tương tự (D') cắt (E) tại P,Q với tọa độ là nghiệm: $\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ \text{ax+by=0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\left(-\frac{by}{a}\right)^2 + 9y^2 = 36 \\ x = -\frac{by}{a} \end{cases}$

$$\Rightarrow P\left(\frac{-6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}; \frac{6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right), Q\left(\frac{6b}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}; \frac{-6a}{\sqrt{9a^2 + 4b^2}}\right)$$

- Tính diện tích tam giác EPFQ ;

Bài 71. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α :

(x – 1)cosα + (y – 1)sinα – 1 = 0

a. Tìm tập hợp cácđiểm của mặt phẳng không thuộc bất kỳ đường thẳng nào của họ.

b. Chứng minh mọi đường thẳng của họ đều tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Giải

b. Gọi $I\left(x_0;y_0\right)$ là điểm cố định . Khoảng cách từ I đến d có giá trị là :

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\left(x_0-1\right)\cos\alpha+\left(y_0-1\right)\sin\alpha-1\right|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=\frac{|-1|}{1}=1\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-1=0\\ y_0-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=1\\ y_0=1\end{cases}\Rightarrow I(1;1)$$

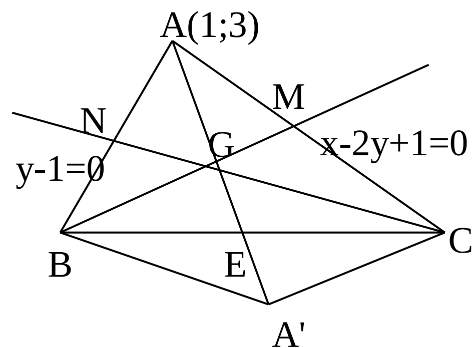
- Với kết quả trên chứng tỏ d luôn tiếp xúc với đường tròn (C) có tâm I và bán kính bằng 1 (Không phụ thuộc vào α . (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Bài 72. Lập ph. trình các cạnh của Δ ABC, biết đỉnh A(1 ; 3) và hai đường trung tuyến xuất phát từ B và C có ph.trình là: x– 2y +1= 0 và y –1= 0.

Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác thì tọ độ G là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-2y+1=0\\ y-1=0\end{cases}\Rightarrow G(1;1)$. E(x;y) thuộc (BC), theo tính chất trọng tâm ta có : $\overrightarrow{GA}=(0;2),\overrightarrow{GE}=(x-1;y-1)\Rightarrow\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{GE}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0=-2(x-1)\\ 2=-2(y-1)\end{cases}\Rightarrow E(1;0)$. C thuộc (CN) cho nên C(t;1), B thuộc (BM) cho nên B(2m-1;m) . Do B,C đối xứng nhau qua E cho nên ta có hệ



phương trình : $\begin{cases}2m+t-1=2\\ m+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=5\\ m=-1\end{cases}\Rightarrow B(5;1),C(-3;-1)$. Vậy (BC) qua E(1;0) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{BC}(-8;-2)//\vec{u}=(4;1)\Rightarrow(BC):\frac{x-1}{4}=\frac{y}{1}\Leftrightarrow x-4y-1=0$. Tương tự :

(AB) qua A(1;3) có $\overrightarrow{AB}=(4;-2)//\vec{u}=(2;-1)\Rightarrow(AB):\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}\Leftrightarrow x+2y-7=0$.

(AC) qua A(1;3) có $\overrightarrow{AC}=(-4;-4)//\vec{u}=(1;1)\Rightarrow(AC):\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{1}\Leftrightarrow x-y+2=0$

* **Chý ý** : Hoặc gọi A' đối xứng với A qua G suy ra A'(1;-1) thì BGCA' là hình bình hành , từ đó ta tìm được tọa độ của 2 đỉnh B,C và cách lập các cạnh như trên.

Bài 73. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho parabol (P) : y^2 = 8x.
a. Tìm tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của (P).
b. Viết p.trình tiếp tuyến của (P) tại điểm M thuộc (P) có tung độ bằng 4.
c. Giả sử đường thẳng (d) đi qua tiêu điểm của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ tương ứng là x_2, x_2. Chứng minh:AB = x_1 +x_2 + 4.

Giải

a/ Tiêu điểm của (P) là F(2;0) , đường chuẩn của (P) có phương trình : x=-2 .
b/ M thuộc (P) có tung độ bằng 4 thì hoành độ x=2 và M(2;4) . Vậy tiếp tuyến d của (P) tại M ta áp dụng công thức : $yy_0=p(x+x_0)\quad(x_0=2;y_0=4)\Rightarrow d:4y=4(x+2)\Leftrightarrow y=x+2$.

c/ Áp dụng công thức bán kính qua tiêu : MF= x+$\frac{p}{2}$. Gọi $A(x_1;y_1),B(x_2;y_2)$ với giá trị của $x_1=\frac{y_1^2}{8},x_2=\frac{y_2^2}{8}$. Ta có : $AF=x_1+2,BF=x_2+2\Rightarrow AB=AF+BF=x_1+x_2+4$ (đpcm)

Bài 74. Trong mặt phẳng Oxy cho Elip (E) :

$$9x^2 + 25y^2 = 225.$$

a. Viết phương trình chính tắc và xác định các tiêu điểm, tâm sai của (E).
b. Một đường tròn (T) có tâm I(0 ; 1) và đi qua điểm A(4 ; 2). Viết phương trình đường tròn và chứng tỏ (T) đi qua hai tiêu điểm của (E).
c. Gọi A, B là 2 điểm thuộc (E) sao cho OA ⊥ OB.chứng minh diện tích tam giác OAB không đổi

Giải

a/ (E) : $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a=5, b=3, c=4 \Leftrightarrow F_1(-4;0), F_2(4;0), e=\frac{4}{5}$

b/ Vì (E) chẵn x,y cho nên Ox,Oy là hai trục đối xứng vì vậy $IF_1 = IF_2 = \sqrt{17}$ (1) . Đường tròn (T) tâm I(0;1) có bán kính R=IA=$\sqrt{4^2+(2-1)^2}=\sqrt{17}$ (2) . Từ (1) và (2) chứng tỏ (T) qua 2 tiêu điểm của (E) .

c/. Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2) \in (E) \Rightarrow \frac{x_1^2}{25}+\frac{y_1^2}{9}=1, \frac{x_2^2}{25}+\frac{y_2^2}{9}=1 (*)$. Và góc hợp bởi OA và chiều dương của Ox là $\alpha \Rightarrow \measuredangle xOB = \frac{\pi}{2}+\alpha (OA \perp OB)$ Khi đó :

$$\Leftrightarrow A(OA\cos\alpha; OA\sin\alpha), B\left[OB\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right); OB\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right]=(-OB\sin\alpha; OB\cos\alpha)$$

Thay vào (*) : $\frac{OA^2\cos^2\alpha}{25}+\frac{OA^2\sin^2\alpha}{9}=1, \frac{OB^2\sin^2\alpha}{25}+\frac{OA^2\cos^2\alpha}{9}=1$. Từ đó ta suy ra :

$$OA^2=\frac{25.9}{25\sin^2\alpha+9\cos^2\alpha}, OB^2=\frac{25.9}{25\cos^2\alpha+9\sin^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{25+9}{25.9}=\frac{34}{225} \Leftrightarrow OH=\frac{15}{\sqrt{34}}$$

Vậy khi A,B thay đổi nhưng khoảng cách từ O đến AB không đổi và AB không đổi (ví OA luôn vuông góc với OB) cho nên diện tích tam giác OAB không đổi .

Bài 75. Cho ΔABC có đỉnh A(2 ; –1) và hai đường phân giác trong của góc B, góc C có phương trình lần lượt là (d_B) : x – 2y + 1 = 0 và (d_C) : x + y + 3 = 0. Lập phương trình cạnh BC.

Giải

- Gọi A' đối xứng với A qua d_B và A" đối xứng với A qua d_C thì A' và A" nằm trên BC .

+/ Tìm tọa độ A' (x;y): $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}\vec{u}=0 \\ I \in d_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-2)+1(y+1)=0 \\ \frac{x+2}{2}-2\left(\frac{y-1}{2}\right)+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=3 \\ x-2y=-6 \end{cases} \Rightarrow A'(0;3)$

+/ Tìm tọa độ A" (x;y) : $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA''}\vec{u}=0 \\ I \in d_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-1(y+1)=0 \\ \frac{x+2}{2}+\left(\frac{y-1}{2}\right)+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=-7 \end{cases} \Rightarrow A''(-2;-5)$

+/ (BC) qua A'(0;3) có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{A'A''}=(-2;-8) // \vec{u}=(1;4) \Rightarrow (BC): \frac{x}{1}=\frac{y-3}{4}$

Bài 76. Tìm điểm M ∈ (H) : $5x^2 – 4y^2 = 20$ (1) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120°.

Giải

- Ta có : (H) : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1 \Rightarrow F_1(-3;0), F_2(3;0) \Leftrightarrow F_1F_2=6, M(x;y)\in(H) \Leftrightarrow \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$

- Và : $\overrightarrow{MF_1}=(x+3;y), \overrightarrow{MF_2}=(x-3;y) \Rightarrow \begin{cases} MF_1^2=(x+3)^2+y^2 \\ MF_2^2=(x-3)^2+y^2 \end{cases}, \overrightarrow{MF_1}\overrightarrow{MF_2}=x^2+y^2-9 (*)$

- Mặt khác : $MF_1=\left|2+\frac{4}{2}x\right|, MF_2=\left|2-\frac{4}{2}x\right| \Rightarrow MF_1MF_2=\left|(2+2x)(2-2x)\right|=4\left|1-x^2\right|$

- Tam giác M F_1F_2 : $(F_1F_2)^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1MF_2\cos 120^0$

$\Leftrightarrow 36=(2-2x)^2+(2+2x)^2+4\left|1-x^2\right| \Leftrightarrow \left|1-x^2\right|=7-2x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1-x^2=7-2x^2 \\ 1-x^2=2x^2-7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=6 \\ x^2=\frac{8}{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4y^2=10 \\ 4y^2=-\frac{20}{3}<0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x^2=6 \\ y^2=\frac{10}{4} \end{cases} \Leftrightarrow M_1\left(-\sqrt{6};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right), M_2\left(-\sqrt{6};\frac{\sqrt{10}}{2}\right), M_3\left(\sqrt{6};-\frac{\sqrt{10}}{2}\right), M_4\left(\sqrt{6};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Bài 77. Trong mặt phẳng Oxy cho (E) : $x^2 + 3y^2 = 12$

a. Tính độ dài trục lớn, trục nhỏ, tọa độ hai tiêu điểm, tâm sai của (E).

b. Cho đường thẳng (D) : mx – 3y + 9 = 0. Tính m để (D) tiếp xúc với (E).

c. Viết phương trình Parabol có đỉnh trùng với gốc tọa độ và có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên trái của (E) đã cho.

Giải

a/ (E) : $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow a=2\sqrt{3}, b=2, c=2\sqrt{2} \Leftrightarrow F_1\left(-2\sqrt{2};0\right), F_2\left(2\sqrt{2};0\right)$

b/ Điều kiện cần và đủ để d tiếp xúc với (E) : $a^2A^2+b^2B^2=C^2$

$\Leftrightarrow 12m^2+4.9=81 \Leftrightarrow 12m^2=45 \Leftrightarrow m^2=\frac{45}{12}=\frac{15}{4} \Leftrightarrow |m|=\frac{\sqrt{15}}{2}$

c/ (P) có dạng : $y^2=2px \Rightarrow F\left(-2\sqrt{2};0\right) \Rightarrow \frac{p}{2}=-2\sqrt{2} \Leftrightarrow p=-4\sqrt{2}$

- Vậy (P) có tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên trái của (E) : $y^2=-8\sqrt{2}x$

Bài 78. Trong mp Oxy, cho Cho (H) có phương trình : $24x^2 - 25y^2 = 600$ (1) và M là một điểm tùy ý trên (H).

a) Tìm tọa độ các đỉnh, tọa độ các tiêu điểm và tính tâm sai của (H).

b) Tìm tọa độ của điểM thuộc (H) có hoành độ x = 10 và tính khoảng cách từ điểm đó đến 2 tiêu điểm.

c) Chứng minh rằng : $OM^2 - MF_1.MF_2$ là một số không đổi.

d) Tìm các giá trị của k để đường thẳng y = kx – 1 có điểm chung với (H).

Giải

a/ (H) : $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1 \Rightarrow a=5, b=2\sqrt{6}, c=7 \Leftrightarrow F_1(-7;0), F_2(7;0)$

b/ Khi x=10 thay vào (1) ta có $y^2=72 \Leftrightarrow y=\pm 6\sqrt{2} \Rightarrow M_1\left(0;-6\sqrt{2}\right), M_2\left(10;6\sqrt{2}\right)$

- Tính khoảng cách : $MF_1=\left|5+\frac{7}{5}x\right|=\left|5+\frac{7}{5}10\right|=19, MF_2=\left|5-\frac{7}{5}10\right|=9$

c/ Ta có : $\left[\begin{array}{l} MF_1 = 5+\frac{7}{5}x, MF_2 = -5+\frac{7}{5}x : x>0 \\ MF_1 = -5-\frac{7}{5}x, MF_2 = 5-\frac{7}{5}x : x<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} MF_1MF_2 = \frac{49}{25}x^2 - 25 : x>0 \\ MF_1MF_2 = -\left(25-\frac{49}{25}x^2\right) : x<0 \end{array}\right.$

$$OM^2 - MF_1MF_2 = \left[\begin{array}{l} x^2+y^2-\frac{49}{25}x^2+25 : x>0 \\ x^2+y^2+\left(25-\frac{49}{25}x^2\right) : x<0 \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 25-\left(\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}\right) : x>0 \\ 25-\left(\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}\right) : x<0 \end{array}\right. = 24$$

d/ Tìm k để phương trình : $24x^2 - 25(kx-1)^2 - 600 = 0$ (có nghiệm x)

$$\Leftrightarrow \left(24-25k^2\right)x^2 + 50kx - 575 = 0 \quad (\exists : x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 24-25k^2 = 0 \\ \begin{cases} 24-25k^2 \neq 0 \\ \Delta' = 25^2 + 575\left(24-25k^2\right) > 0. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ \begin{cases} k \neq \pm\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ |k| \leq \frac{\sqrt{577}}{5\sqrt{23}} \end{cases} \end{array}\right.$$

Bài 79. Trong mặt phẳng Oxy cho Hyperbol (H) : $12x^2 - 16y^2 = 192$ và điểm P(2 ; 1). Viết phương trình đường thẳng đi qua P và cắt (H) tại 2 điểm M, N sao cho P là trung điểm của MN.

Giải

(H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1 \Rightarrow a = 4, b = 2\sqrt{3}, c = 2\sqrt{7} \Leftrightarrow F_1\left(-2\sqrt{7};0\right), F_2\left(2\sqrt{7};0\right)$. Gọi M(x;y) thuộc (H) và N đối xứng với M qua P(2;1) thì N(4-x; 2-y) . Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì N phải thuộc (H)., do đó ta có hệ : $\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1 & (1) \\ \frac{(4-x)^2}{16} - \frac{(2-y)^2}{12} = 1 & (2) \end{cases}$. Lấy (2)-(1) ta được phương trình rút gọn : 3x-2y-4=0 . Đó cũng chính là phương trình đường thẳng qua P .

Bài 80. Trong mặt phẳng Oxy cho (E) : $4x^2 + y^2 = 4$.

a. Tính độ dài trục lớn, trục nhỏ, tọa độ hai tiêu điểm, tâm sai của (E).

b. Tìm các giá trị của m để đường thẳng y = x + m cắt (E) tại 2 điểm phân biệt M, N khi m thay đổi. Tìm tập hợp các trung điểm của MN

Giải

a/ (E): $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = \sqrt{3} \Rightarrow F_1\left(0;-\sqrt{3}\right), F_2\left(0;\sqrt{3}\right)$. Tiêu điểm thuộc Oy .

b/ Đường thẳng y=x+m cắt (E) tại 2 điểm M,N có tọ độ là nghiệm của hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 4 \\ y = x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + (x+m)^2 = 4 \\ y = x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2mx + m^2 - 4 = 0 & (1) \\ y = x+m & (2) \end{cases}$$

- Như vậy hoành độ của M,N là 2 nghiệm của (1) với điều kiện : $\Delta' = -4m^2 + 20 > 0$, hay : $\Leftrightarrow |m| < \sqrt{5}$ (*). Gọi $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ và I là trung điểm của MN thì ta có tọa độ I là :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y_I = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -\dfrac{m}{5} \\ y_I = x_I + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -5x_I \\ y_I = x_I - 5x_I = -4x_I \end{cases}$$

Do đó I chạy trên đường thẳng : y=-4x .

- Giới hạn quỹ tích : Từ (*) : $|m| < \sqrt{5} \Leftrightarrow |-5x_I| < \sqrt{5} \Leftrightarrow |x_I| < \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

- Kết luận : Khi m thay đổi I chạy trên đường thẳng d: y=-4x (chỉ lấy những điểm có hoành độ nằm trong khoảng $\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{5};\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Bài 81. Trong mp Oxy cho parabol (P) : $y^2 = 12x$.
a. Tìm tọa độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn (Δ) của (P).
b. Một điểm nằm trên parabol có hoành độ x = 2. Hãy tính khoảng cách từ điểm đó đến tiêu điểm.
c. Qua điểm I(2 ; 0) vẽ 1 đường thẳng thay đổi cắt (P) tại A và B. Chứng minh rằng tích số khoảng cách từ A và B đến trục Ox là một hằng số.

Giải

a/ Với p=6 thì p/2=3 và F(3;0) . Đường chuẩn có phương trình : x=-3 .
b/ Gọi M ∈ (P) có x=2 thì tung độ M là : $y^2 = 24 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{6} \Rightarrow M_1\left(2;-2\sqrt{6}\right), M_2\left(2;2\sqrt{6}\right)$

- Khoảng cách từ M đến tiêu điểm : MF=x+$\dfrac{p}{2} \Rightarrow MF_1 = 2 - 2\sqrt{6}, MF_2 = 2 + 2\sqrt{6}$

c/ Đường thẳng d qua I(2;0) có dạng : x=2 (//Oy) cắt (P) tại 2 điểm hiển nhiên khoảng cách từ 2 điểm này tới Ox bằng nhay (vì chúng đối xứng nhau qua Ox). Gọi d có hệ số góc k qua I (2;0) thì d : y=k(x-2)=kx-2k (1) . Nếu d cắt (P) tại 2 điểm thì hoành độ của 2 điểm là 2 nghiệm của phương trình : $(kx-2k)^2 = 12x \Leftrightarrow k^2x^2 - 4\left(k^2+3\right)x + 4k^2 = 0(1)$

- Hoặc tung độ của 2 điểm là 2 nghiệm của phương trình : $y^2 = 12\left(\dfrac{y}{k}+2\right)$

$\Leftrightarrow ky^2 - 12y - 2k = 0(2)$

- Tích khoảng cách từ 2 điểm đến trục Ox chính là tích của 2 tung độ của hai điểm . Vậy từ (2) ta có : $y_1y_2 = \dfrac{-2k}{k} = -2$ là một hằng số (đpcm)

Bài 82. Viết phương trình tiếp tuyến của (E) : $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{18} = 1$, biết tiếp tuyến đi qua A(6 ; $3\sqrt{2}$).

Giải

Bài 83. a. Cho Parabol (P) có phương trình $y^2 = x$ và đường thẳng d có phương trình : 2x – y – 1 = 0. Hãy viết phương trình tiếp tuyến của (P) tại các giao điểm của (P) và d.
b. Lập phương trình tiếp tuyến chung của (P) : $y^2 = 4x$ và (E) : $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{2} = 1$

Giải

a/ Điểm chung d và (P) có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$:\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x \\ 2x = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - y - 1 = 0 \\ 2x = y+1 \end{cases} \Leftrightarrow A(1;1), B\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2}\right)$$

- Phương trình tiếp tuyến có : $yy_0 = p(x+x_0) \Rightarrow d_A : 1.y = \frac{1}{2}(x+1) \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$. Và $d_B : -\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow x + y + \frac{1}{4} = 0$.

b/ Gọi d là tiếp tuyến chung của (P) và (E) có dạng : ax+by+c=0

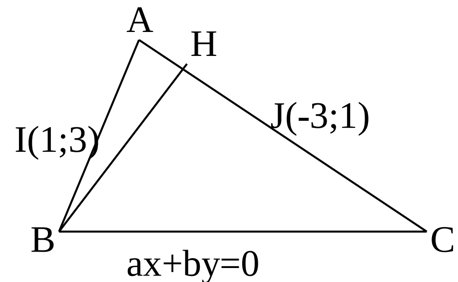
- d là tiếp tuyến (P) : p B^2 =2AC $\Leftrightarrow 2b^2$ =2ac , hay : b^2 =ac (1)
- d là tiếp tuyến (E) : $8a^2 + 2b^2 = c^2\,(2)$.
- Thay b từ (1) thay vào (2) : $8a^2 + 2(ac) - c^2 = 0 \Leftrightarrow 8a^2 + 2ac - c^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -2a \\ c = 4a \end{array}\right.$
- Từ (1) a,c cùng dấu cho nên chọn : c=4a hay :

$\Leftrightarrow$ ac= $4a^2 = b^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2a \rightarrow d : \text{ax+2ay+4a=0} \leftrightarrow \text{x+2y+4=0} \\ b = -2a \rightarrow d : \text{ax-2ay+4a=0} \leftrightarrow \text{x-2y+4=0} \end{array}\right.$

Bài 84. Cho tam giác ABC có trung điểm AB là I(1;3), trung điểm AC là J(-3;1). Điểm A thuộc Oy , và đường thẳng BC đi qua gốc tọa độ O . Tìm tọa độ điểm A , phương trình đường thẳng BC và đường cao vẽ từ B ?

Giải

- Do A thuộc Oy cho nên A(0;m). (BC) qua gốc tọa độ O cho nên (BC): ax+by=0 (1).
- Vì IJ là 2 trung điểm của (AB) và (AC) cho nên IJ //BC suy ra (BC) có véc tơ chỉ phương : $\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = (-4;-2) // \vec{u} = (2;1) \Rightarrow (BC): x - 2y = 0$.
- B thuộc (BC) suy ra B(2t;t) và A(2-2t;6-t) . Nhưng A thuộc Oy cho nên : 2-2t=0 , t=1 và A(0;5). Tương tự C(-6;-3) ,B(0;1).
- Đường cao BH qua B(0;1) và vuông góc với AC cho nên có $\overrightarrow{AC} = (-6;-8) // \vec{u} = (3;4) \Rightarrow (BH): \frac{x}{3} = \frac{y-1}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y + 3 = 0$



Bài 85. Cho hai điểm A(1;1), B(4;-3) và đường thẳng d : x-2y-1=0.

a. Tìm tọa độ điểm C trên d sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB=6(ĐHKB-04)

b. Tìm tọa độ trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB ?(ĐHKA-2004)

Giải

a/ (AB) qua A(1;1) có $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3;-4) \Rightarrow (AB): \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow 4x + 3y - 7 = 0$

- C thuộc : x-2y-1=0 suy ra C(2t+1;t) do đó : $6 = \frac{|4(2t+1) + 3t - 7|}{5} \Leftrightarrow |11t - 3| = 30$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \rightarrow C_1(7;3) \\ t = -\frac{27}{11} \rightarrow C_2\left(-\frac{43}{11};-\frac{27}{11}\right) \end{array}\right.$$

b/ - Đường thẳng qua O vuông góc với AB có phương trình : 3x-4y=0.
- Đường thẳng qua B và vuông góc với OA có phương trình : (x-4)+(y+3)=0.
- Đường thẳng qua A và vuông góc với OB có phương trình : 4(x-1)-3(y-1)=0

hay : 4x-3y-1=0

- Vậy tọa độ trực tâm H là nghiệm :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4y=0 \\ x+y-1=0 \\ 4x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-4(1-x)=0 \\ y=1-x \\ 4x-3y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{7} \\ y=\dfrac{3}{7} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$$

- Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác (C): $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
- (C) qua O(0;0) suy ra c=0 (1)
- (C) qua A(1;1) suy ra : 2-2a-2b=0 , hay : a+b=1 (2)
- (C) qua B(4;-3) suy ra : 25-8a+6b=0 , hay : 8a-6b=25 (3)
- Từ (2) và (3) ta có hệ : $\begin{cases} a+b=1 \\ 8a-6b=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-a \\ 8a-6(1-a)=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1-\dfrac{31}{14} \\ a=\dfrac{31}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{17}{14} \\ a=\dfrac{31}{14} \end{cases}$
- Vậy (C) : $x^2+y^2-\frac{31}{7}x+\frac{17}{4}y=0$

Bài 86. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng d : x+2y-3=0 và hai điểm A(1;0) ,B(3;-4). Hãy tìm trên d điểm M sao cho : $\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất

Giải

- Trên d có M(3-2t;t) suy ra : $\overrightarrow{MA}=(2-2t;t),\overrightarrow{MB}=(-2t;t+4)\Rightarrow 3\overrightarrow{MB}=(-6t+3t+12)$
- Do vậy : $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=(2-8t;4t+12)\Rightarrow \left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{(2-8t)^2+(4t+12)^2}$
- Hay : f(t)=$\left|\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\sqrt{80t^2+64t+148}=\sqrt{80\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{676}{5}}\geq\frac{26}{\sqrt{5}}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi t= $-\frac{2}{5}\Rightarrow M\left(\frac{19}{5};-\frac{2}{5}\right)$. Khi đó min(t)= $\frac{26}{\sqrt{5}}$.

Bài 87. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm M(2;-1) và đường tròn $(C_1): x^2+y^2=9$ (1) .Hãy viết phương trình đường tròn (C_2):có bán kính bằng 4 và cắt đường tròn (C_1) theo dây cung qua M có độ dài nhỏ nhất .

Giải

Gọi (C_2):có tâm I'(a;b) suy ra :

$$(C_2):(x-a)^2+(y-b)^2=16 \quad \Leftrightarrow x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-16=0\,(1)$$

Lấy (1) -(2) ta được : $2ax+2by-(a^2+b^2)+7=0$ (chính là đường thẳng trục đẳng phương)

Dây cung của hai đường tròn nằm trên đường thẳng này .

Ví dây cung qua M(2;-1) lên ta có : $4a-2b-(a^2+b^2)+7=0\Leftrightarrow(a-2)^2+(b+1)^2=12$

Bài 88. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm A(2;5),B(5;1) . Viết phương trình đường thẳng d qua A sao cho khoảng cách từ B đến d bằng 3.

Giải

Đường thẳng d qua A(2;5) có $\vec{n}=(a;b)\Rightarrow d:a(x-2)+b(y-5)=0$ (1)

Theo giả thiết : $h(B,d)=\dfrac{\left|a(5-2)+b(1-5)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Leftrightarrow(3a-4b)^2=9(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow 7b^2-24ab=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \to d: a(x-2)=0 \leftrightarrow x-2=0 \\ b=\dfrac{24a}{7} \to (x-2)+\dfrac{24}{7}(y-5)=0 \leftrightarrow 7x+24y-114=0 \end{array}\right.$

Bài 89. Trong (Oxy) cho A(2;5) và đường thẳng d : 2x+3y+4=0. Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d' qua A và tạo với d một góc bằng 45^0.

Giải

Đường thẳng d' qua A(2;5) có $\vec{n}=(a;b) \Rightarrow d: a(x-2)+b(y-5)=0 \quad (1)$

Đường thẳng d có véc tơ pháp tuyến $\vec{n'}=(2;3)$. Theo giả thiết thì :

$\cos 45^0 = \dfrac{2a+3b}{\sqrt{13}\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2(2a+3b)^2 = 13(a^2+b^2) \Leftrightarrow 5b^2+24ab-5a^2=0$

Ta có : $\Delta'_b = 169a^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=-5a \to d':(x-2)-5(y-5)=0 \leftrightarrow x-5y+23=0 \\ b=\dfrac{a}{5} \leftrightarrow a=5b \to d':5(x-2)+(y-5)=0 \leftrightarrow 5x+y-15=0 \end{array}\right.$

Bài 90. Trong (Oxy) cho hình chữ nhật ABCD , biết phương trình chứa 2 đường chéo là $d_1: 7x+y-4=0$ và $d_2: x-y+2=0$. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh hình chữ nhật , biết đường thẳng đó đi qua điểm M(-3;5).

Giải

- Tâm của hình chữ nhật có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 7x+y-4=0 \\ x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{9}{4}\right)$

Gọi d là đường thẳng qua M(-3;5) có véc tơ pháp tuyến : $\vec{n}(a;b)$. Khi đó

$\Rightarrow d: a(x+3)+b(y-5)=0 (1)$. Gọi cạnh hình vuông (AB) qua M thì theo tính chất hình chữ nhật : $\dfrac{\left|\vec{n}\vec{n_1}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{n_1}\right|} = \dfrac{\left|\vec{n}\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{n_2}\right|} \Leftrightarrow \dfrac{|7a+b|}{\sqrt{50}\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow |7a+b| = 5|a-b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-3b \\ b=3a \end{array}\right.$

Do đó : $\left[\begin{array}{l} a=-3b \to d: -3(x+3)+(y-5)=0 \leftrightarrow 3x-y+14=0 \\ b=3a \leftrightarrow (x+3)+3(y-5)=0 \leftrightarrow x+3y-12=0 \end{array}\right.$

Bài 91. Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC*, với $A(1;1), B(-2;5)$, đỉnh *C* nằm trên đ- ờng thẳng $x-4=0$, và trọng tâm *G* của tam giác nằm trên đ- ờng thẳng $2x-3y+6=0$. Tính diện tích tam giác *ABC*.

HD

Ta có $C=(4;y_C)$. Khi đó tọa độ *G* là $x_G = \dfrac{1-2+4}{3} = 1,\ y_G = \dfrac{1+5+y_C}{3} = 2+\dfrac{y_C}{3}$. Điểm G nằm trên đ- ờng thẳng $2x-3y+6=0$ nên $2-6-y_C+6=0$, vậy $y_C=2$, tức là: $C=(4;2)$

. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$, $\overrightarrow{AC}=(3;1)$, vậy $AB=5,\ AC=\sqrt{10}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-5$.

Diện tích tam giác *ABC* là $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{AB^2.AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{25.10-25} = \boxed{\dfrac{15}{2}}$

Bài 92. . Trong mặt phẳng tọa độ *Oxy* cho tam giác *ABC*, với $A(2;-1), B(1;-2)$, trọng tâm *G* của tam giác nằm trên đ- ờng thẳng $x+y-2=0$. Tìm tọa độ đỉnh C biết diện tích tam giác *ABC* bằng 13,5 .

HD

. Vì G nằm trên đ- ờng thẳng $x+y-2=0$ nên G có tọa độ $G=(t;2-t)$. Khi đó $\overrightarrow{AG}=(t-2;3-t)$, $\overrightarrow{AB}=(-1;-1)$ Vậy diện tích tam giác *ABG* là

$S=\frac{1}{2}\sqrt{AG^2.AB^2-(\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2[(t-2)^2+(3-t)^2]-1}=\frac{|2t-3|}{2}$

Nếu diện tích tam giác ABC bằng 13,5 thì diện tích tam giác ABG bằng $13,5:3=4,5$. Vậy $\frac{|2t-3|}{2}=4,5$, suy ra $t=6$ hoặc $t=-3$. Vậy có hai điểm G : $G_1=(6;-4), G_2=(-3;-1)$. Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $x_C=3x_G-(x_a+x_B)$ và $y_C=3y_G-(y_a+y_B)$.

Với $G_1=(6;-4)$ ta có $C_1=(15;-9)$, với $G_2=(-3;-1)$ ta có $C_2=(-12;18)$

Bài 93. . Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho hai đường thẳng $\Delta: x+3y+8=0$, $\Delta':3x-4y+10=0$ và điểm A(-2 ; 1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng Δ, đi qua điểm A và tiếp xúc với đường thẳng Δ'.

HD

Tâm I của đường tròn thuộc Δ nên I(-3t – 8; t)

Theo yc thì k/c từ I đến Δ' bằng k/c IA nên ta có $\frac{|3(-3t-8)-4t+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\sqrt{(-3t-8+2)^2+(t-1)^2}$

Giải tiếp được t = -3

Khi đó I(1; -3), R = 5 và pt cần tìm: $(x-1)^2+(y+3)^2=25$.

Bài 94. . Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường tròn hai đường tròn $:(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0,\ (C'): x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua M(1; 0). Viết phương trình đường thẳng qua M cắt hai đường tròn $(C), (C')$ lần lượt tại A, B sao cho *MA= 2MB.*

HD

+ Gọi tâm và bán kính của (C), (C') lần lượt là I(1; 1) , I'(-2; 0) và $R=1, R'=3$, đường thẳng (d) qua M có phương trình $a(x-1)+b(y-0)=0 \Leftrightarrow ax+by-a=0, (a^2+b^2\neq 0)(*)$.

+ Gọi H, H' lần lượt là trung điểm của AM, BM.

Khi đó ta có: $MA=2MB \Leftrightarrow \sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{I'A^2-I'H'^2} \Leftrightarrow 1-(d(I;d))^2=4[9-(d(I';d))^2]$, $IA>IH$.

$\Leftrightarrow 4(d(I';d))^2-(d(I;d))^2=35 \Leftrightarrow 4.\frac{9a^2}{a^2+b^2}-\frac{b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow \frac{36a^2-b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow a^2=36b^2$

Dễ thấy $b\neq 0$ nên chọn $b=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-6 \\ a=6 \end{array}\right.$.

Kiểm tra điều kiện $IA>IH$ rồi thay vào (*) ta có hai đường thẳng thoả m ãn.

Bài 95. . Tam giác cân ABC có đáy BC nằm trên đường thẳng : 2x – 5y + 1 = 0, cạnh bên AB nằm trên đường thẳng : 12x – y – 23 = 0 . Viết phương trình đường thẳng AC biết rằng nó đi qua điểm (3;1)

HD

Đường thẳng AC đi qua điểm (3 ; 1) nên có phương trình : a(x – 3) + b(y – 1) = 0 ($a^2+b^2\neq 0$)

Góc của nó tạo với BC bằng góc của AB tạo với BC nên : $\frac{|2a-5b|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2.12+5.1|}{\sqrt{2^2+5^2}.\sqrt{12^2+1^2}}$

$\Leftrightarrow \frac{|2a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 5(2a-5b)^2=29(a^2+b^2) \Leftrightarrow 9a^2+100ab-96b^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-12b \\ a=\frac{8}{9}b \end{array}\right.$

Nghiệm a = -12b cho ta đường thẳng song song với AB (vì điểm (3 ; 1) không thuộc AB) nên không phải là cạnh tam giác . Vậy còn lại : 9a = 8b hay a = 8 và b = 9

Phương trình cần tìm là : 8x + 9y – 33 = 0

Bài 96. . Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy. Cho elip (E) : $x^2+4y^2-4=0$.Tìm những điểm N trên elip (E) sao cho : $F_1\hat{N}F_2=60^0$ (F_1 , F_2 là hai tiêu điểm của elip (E))

HD

+ (C) có tâm I(2 , 1) và bán kính R = $\sqrt{6}$

+ $A\hat{M}B=90^0$ (A,B là các tiếp điểm) suy ra : $MI=MA.\sqrt{2}=R.\sqrt{2}=\sqrt{12}$

Vậy M thuộc đường tròn tâm I bán kính $R'=\sqrt{12}$ và M thuộc d nên M(x , y) có tọa độ thỏa hệ:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=12\\ x+y+1=0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=-1-\sqrt{2}\end{cases}\vee\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=-1+\sqrt{2}\end{cases}$$

Vậy có 2 điểm thỏa yêu cầu bài toán có tọa độ nêu trên

Bài 97. . Trong mp (Oxy) cho đường thẳng (Δ) có phương trình: x – 2y – 2 = 0 và hai điểm A (-1;2); B (3;4). Tìm điểm $M\in(\Delta)$ sao cho $2MA^2+MB^2$ có giá trị nhỏ nhất

HD

$M\in\Delta\Rightarrow M(2t+2;t),\overrightarrow{AM}=(2t+3;t-2),\overrightarrow{BM}=(2t-1;t-4)$

$2AM^2+BM^2=15t^2+4t+43=f(t)$

Min f(t) = $f\left(-\dfrac{2}{15}\right)$ => M$\left(\dfrac{26}{15};-\dfrac{2}{15}\right)$

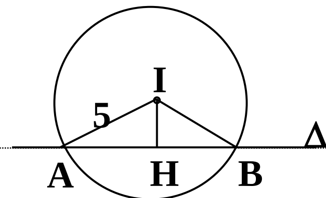
Bài 98. . Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-2my+m^2-24=0$ có tâm I và đường thẳng Δ: mx + 4y = 0. Tìm m biết đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A,B thỏa mãn diện tích tam giác IAB bằng 12.

HD

Đường tròn (C) có tâm I(1; m), bán kính R = 5.

Gọi H là trung điểm của dây cung AB.

Ta có IH là đường cao của tam giác IAB.



IH = $d(I,\Delta)=\dfrac{|m+4m|}{\sqrt{m^2+16}}=\dfrac{|5m|}{\sqrt{m^2+16}}$

$AH=\sqrt{IA^2-IH^2}=\sqrt{25-\dfrac{(5m)^2}{m^2+16}}=\dfrac{20}{\sqrt{m^2+16}}$

Diện tích tam giác IAB là $S_{\Delta IAB}=12\Leftrightarrow 2S_{\Delta IAH}=12$

$$\Leftrightarrow d(I,\Delta).AH=12\Leftrightarrow 25|m|=3(m^2+16)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm3\\ m=\pm\dfrac{16}{3}\end{array}\right.$$

Bài 99. . Cho đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$.
Viết phương trình đường tròn (C') tâm M(5, 1) biết (C') cắt (C) tại các điểm A, B sao cho $AB=\sqrt{3}$.

HD

Phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$ có tâm I(1, –2) $R=\sqrt{3}$

Đường tròn (C') tâm M cắt đường tròn (C) tại A, B nên AB ⊥ IM tại trung điểm H của đoạn AB. Ta có $AH=BH=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Có 2 vị trí cho AB đối xứng qua tâm I.

Gọi A'B' là vị trí thứ 2 của AB, Gọi H' là trung điểm của A'B'

Ta có: $IH' = IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{3 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$, $MI = \sqrt{(5-1)^2 + (1+2)^2} = 5$

Vậy có 2 đường tròn (C') thỏa ycbt là: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 13$
hay $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 43$

Bài 100. . Trong mặt phẳng Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ và đ- ờng thẳng Δ :3x + 4y =12. Từ điểm M bất kì trên Δ kẻ tới (E) các tiếp tuyến MA, MB. Chứng minh rằng đ- ờng thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

HD

Gọi $M(x_0;y_0)$, $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$. Tiếp tuyến tại A có dạng : $\frac{xx_1}{4} + \frac{yy_1}{3} = 1$

Tiếp tuyến đi qua M nên : $\frac{x_0x_1}{4} + \frac{y_0y_1}{3} = 1$ (1)

Ta thấy tọa độ của A và B đều thỏa mãn (1) nên đờng thẳng AB có pt : $\frac{xx_0}{4} + \frac{yy_0}{3} = 1$

do M thuộc Δ nên $3x_0 + 4y_0 = 12 \Rightarrow 4y_0 = 12 - 3x_0 \Rightarrow \frac{4xx_0}{4} + \frac{4yy_0}{3} = 4$, $\frac{4xx_0}{4} + \frac{y(12-3x_0)}{3} = 4$

Gọi F(x;y) là điểm cố định mà AB đi qua với mọi M thì : $(x-y)x_0 + 4y - 4 = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ 4y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$. Vậy AB luôn đi qua điểm cố định F(1;1)

Bài 101. . Trong mặt phẳng Oxy cho ba đường thẳng $d_1 : 4x + y - 9 = 0$, $d_2 : 2x - y + 6 = 0$, $d_3 : x - y + 2 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình thoi ABCD, biết hình thoi ABCD có diện tích bằng 15, các đỉnh A,C thuộc d_3, B thuộc d_1 và D thuộc d_2.

HD

Đường chéo (BD) vuông góc với (AC) cho nên (BD có dạng : x+y+m=0

(BD) cắt d_1 tại B có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x+y+m=0 \\ 4x+y-9=0 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{m+9}{3}; -\frac{4m+9}{3}\right)$

(BD) cắt d_2 tại D có tọa độ là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x+y+m=0 \\ 2x-y+6=0 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{m+6}{3}; \frac{-2m+6}{3}\right)$

Trung điểm I của BD là tâm hình thoi có tọa độ là : $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{2m+1}{2}\right)$

Theo giả thiết I thuộc (AC) : $\frac{1}{2} + \frac{2m+1}{2} + 2 = 0 \Rightarrow m = -3 \Leftrightarrow (BD): x + y - 3 = 0$ và tọa độ các điểm B(2;1),D(-1;4) và I$\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$. Gọi A(t;t+2) thuộc (AC) . Suy ra : $h(A,(AC)) = \frac{|t+t+2-3|}{\sqrt{2}}$

$= \frac{|2t-1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow S = 2\frac{1}{2}BD.h(A,AC) = 3\sqrt{2}\frac{|2t-1|}{\sqrt{2}} = 15 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \to A(3;5) \leftrightarrow C(-2;0) \\ t = -2 \to A(-2;0) \leftrightarrow C(3;5) \end{array}\right.$

Bài 102. Trong (Oxy) cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$ và $(P): y^2 = x$. Tìm trên (P) các điểm M mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) và 2 tiếp tuyến đó tạo với nhau một góc 60^0

Giải

Gọi $M(x_0;y_0)\in(P)\Rightarrow y_0^2=x_0$. d là đường thẳng tiếp tuyến của (P) tại M thì d có phương trình : $y_0y=\frac{1}{2}(x+x_0)\Leftrightarrow x-2y_0y+x_0=0$. Để d là tiếp tuyến kẻ từ M đến (C) thì điều kiện cần và đủ là :

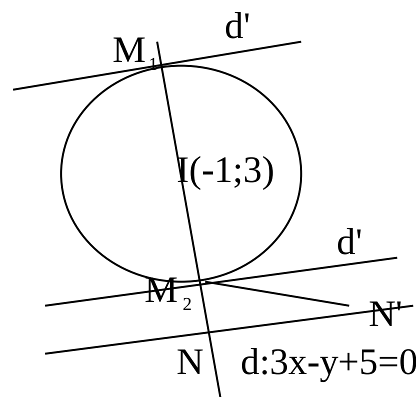
Bài 103. Trong (Oxy) cho đ. thẳng d: 3x-y+5=0 và đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-6y+9=0$. Tìm điểm M thuộc (C) và điểm N thuộc d sao cho MN có độ dài nhỏ nhất ?

Giải

(C) : $(x+1)^2+(y-3)^2=1\Rightarrow I(-1;3),R=1$

- Gọi d' //d thì d': 3x-y+m=0 . d' tiếp xúc với (C) tại M (M là điểm cách d nhỏ nhất) , khi đó : $h(I;d')=R\Leftrightarrow\frac{|-3-3+m|}{\sqrt{10}}=1\Leftrightarrow|m-6|=\sqrt{10}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=6+\sqrt{10}\to d':3x-y+6+\sqrt{10}=0\\m=6-\sqrt{10}\to d':3x-y+6-\sqrt{10}=0\end{array}\right.$

Giả sử N' thuộc d ta luôn có : $M_2N'\ge M_2N$. Dấu bằng chỉ xảy ra khi N' trùng với N . Vậy ta chỉ cần lập đường thẳng Δ qua I(-1;3) và vuông góc với d suy ra đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=-1+3t\\y=3-t\end{cases}$. Khi đó Δ cắt d' tại 2 điểm : $3(-1+3t)-(3-t)+6+\sqrt{10}=0\to t=\frac{1}{\sqrt{10}}$.



Và $3(-1+3t)-(3-t)+6-\sqrt{10}=0\to t=-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Do vậy ta tìm được 2 điểm M : $M_1\left(\frac{3}{\sqrt{10}}-1;3-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$,

và $M_2\left(-1-\frac{3}{\sqrt{10}};3+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$. Tương tự Δ cắt d tại N có tọa độ là nghiệm :

$\begin{cases}x=-1+3t\\y=3-t\\3x-y+5=0\end{cases}\Rightarrow t=\frac{1}{10}\Leftrightarrow N\left(-\frac{7}{10};\frac{29}{10}\right)$. Ta chọn M bằng cách tính M_1N,M_2N , sau đó so sánh : Nếu $M_1N>M_2N$ thì M là M_2. Còn $M_1N<M_2N$ thì M là M_1.

Bài 104. Trong (Oxy) cho $(C):(x+1)^2+(y-3)^2=1$ và điểm $M\left(\frac{1}{5};\frac{7}{5}\right)$. Tìm trên (C) điểm N sao cho MN có độ dài lớn nhất ?

Giải

(C) viết dưới dạng tham số : $\begin{cases}x=-1+\sin t\\y=3+\cos t\end{cases}\Rightarrow N\in(C)\Rightarrow N(-1+\sin t;3+\cos t)$

Khi đó : $MN=\sqrt{\left(-\frac{6}{5}+\sin t\right)^2+\left(-\frac{8}{5}+\cos t\right)^2}=\sqrt{\sin^2t+\cos^2t-\frac{12}{5}\sin t-\frac{16}{5}\cos t+4}$

$=\sqrt{-\frac{12}{5}\sin t-\frac{16}{5}\cos t+5}=\sqrt{5-4\left(\frac{12}{20}\sin t+\frac{16}{20}\cos t\right)}(*)$. Vì : $\left(\frac{12}{20}\right)^2+\left(\frac{16}{20}\right)^2=1$,

$\Rightarrow\cos\varphi=\frac{12}{20}=\frac{3}{5};\sin\varphi=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$ thì (*) trở thành : $\sqrt{5-4\sin(t+\varphi)}\le\sqrt{5-4}=1$

Dấu đẳng thức xảy ra khi : $\sin(t+\varphi)=1\Leftrightarrow t=-\varphi+\frac{\pi}{2}+k2\pi$

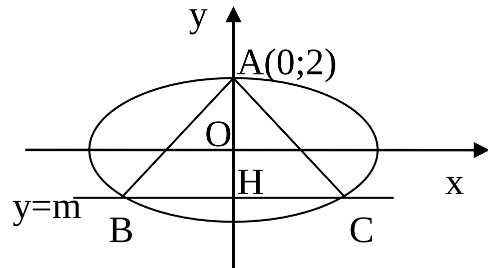
Do vậy : $\sin t=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\cos\varphi=\frac{3}{5}\Leftrightarrow x=-1+\sin t=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$

Tương tự : $\cos t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{4}{5}\Rightarrow y=3+\cos t=3+\frac{4}{5}=\frac{19}{5}\Rightarrow N\left(-\frac{2}{5};\frac{19}{5}\right)$

Bài 105. Tính diện tích tam giác đều nội tiếp (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, nhận A(0;2) làm đỉnh và trục Oy làm trục đối xứng ?

Giải

Do ABC là tam giác đều , A(0;2) thuộc Oy là trục đối xứng cho nên B,C phải nằm trên đường thẳng y=m (//Ox) cắt (E) . Vì thế tọa độ của B,C là nghiệm của hệ :



$\begin{cases}y=m\\4x^2+16y^2=64\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=m\\x^2=16-4m^2\geq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=m\\-2\leq m\leq 0\\x=\pm\sqrt{16-4m^2}\end{cases}$. Ta có : $AC=\sqrt{x^2+4}=\sqrt{16-m^2+4}=\sqrt{20-m^2},\quad BC=2\sqrt{16-m^2}$

Do vậy ABC đều khi :AC=BC $\Leftrightarrow\sqrt{20-m^2}=2\sqrt{16-m^2}\Leftrightarrow 20-m^2=4\left(16-m^2\right)\Rightarrow m^2=\frac{44}{3}$

Vậy : $m=-\frac{2\sqrt{33}}{3}$, suy ra $S_{ABC}=\frac{1}{2}BC.AH=\frac{1}{2}BC.BC\sqrt{3}=\frac{1}{2}BC^2\sqrt{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}.4\left(16-m^2\right)$

Hay : $S_{ABC}=2\sqrt{3}.\left(16-\frac{44}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}$

Bài 106. Tính diện tích tam giác đều nội tiếp (P): $y^2=2x$, nhận đỉnh của (P) làm đỉnh và trục Ox làm trục đối xứng ?

Giải

(P) có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2};0\right)$. Nếu Ox làm trục đối xứng thì B,C nằm trên đường thẳng : x=m (song song với Oy) . Do vậy tọa độ của B,C là nghiệm của hệ : $\begin{cases}y^2=2x\\x=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=2m\\x=m\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm\sqrt{2m}\\x=m>0\end{cases}\Leftrightarrow B\left(m;\sqrt{2m}\right),C\left(m;-\sqrt{2m}\right)\Rightarrow BC=2\sqrt{2m}$

Vì OBC là tam giác đều : $OB^2=BC^2\Leftrightarrow m^2+2m=4\left(2m\right)\Leftrightarrow m^2-6m=0\Rightarrow m=6\left(m>0\right)$

Vậy $S_{OBC}=\frac{1}{2}BC.OH=\frac{1}{2}.BC^2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}4\left(2m\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}4\left(2.6\right)=24\sqrt{3}$ (đvdt)

Bài 107. Trong (Oxy) cho điểm M(1;2) . Lập phương trình đường thẳng d qua M cắt Ox,Oy lần lượt tại A,B sao cho diện tích tam giác OAB nhỏ nhất .

Giải

Đường thẳng dạng : x=1 và y=2 không cắt 2 trục tọa độ . Cho nên gọi d là đường thẳng qua M(1;2) có hệ số góc k(khác 0) thì d : y=k(x-1)+2 , hay y=kx+2-k .

Đường thẳng d cắt Ox tại $A\left(\frac{k-2}{k};0\right)$ và cắt Oy tại B(0;2-k)

Do đó : $S_{OAB}=\frac{1}{2}\left|\frac{k-2}{k}\right||2-k|=\frac{1}{2}\left|\frac{k^2-4k+4}{k}\right|=\frac{1}{2}\left|k-4+\frac{4}{k}\right|$ (1)

Xét f(k)=$k-4+\frac{4}{k}\Rightarrow f'(k)=1-\frac{4}{k^2}=0\Leftrightarrow k=\pm 2$

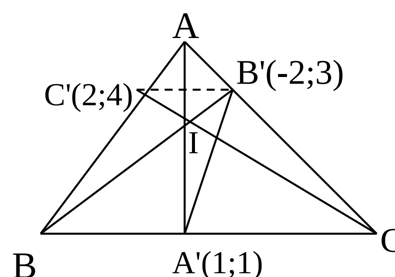
Ta có bảng biến thiên :

k	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f'(k)		+	0	-	||	-	0	+	
f(k)	$-\infty$ ↗		-16	↘	||	↘	-6	↗	$+\infty$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta có macx $|f(k)|=16$ đạt được khi k=-2 . Khi đó đường thẳng d : y=-2(x-1)+2 , hay y=-2x+4 và A(2;0) và B(0;4) .

Bài 108. Trong (Oxy) cho tam giác ABC, biết ba chân đường cao tương ứng với 3 đỉnh A,B,C là A'(1;1),B'(-2;3),C'(2;4). Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh (BC).

Giải



Do là các đường cao cho nên tứ giác AC'IB' là từ giác nội tiếp trong đường tròn có đường kính là AI , C'B' là một dây cung vì vậy AA' vuông góc với C'B' . Vậy (BC) qua A'(1;1) và có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{C'B'}=(-4;-1)//\vec{n}=(4;1)\Rightarrow(BC):4(x-1)+y-1=0$

$\Leftrightarrow 4x+y-5=0$.

Tương tự như lập luận trên ta tìm ra phương trình các cạnh của tam giác ABC :

(AB) : 3x-2y+2=0 ....

Bài 109. Trong (Oxy) cho hai điểm $A\left(2\sqrt{3};2\right),B\left(2\sqrt{3};-2\right)$

a/ Chứng tỏ tam giác OAB là tam giác đều

b/ Chứng minh rằng tập hợp các điểm M sao cho : $MO^2+MA^2+MB^2=32$ là một đường tròn (C).

c/ Chứng tỏ (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Giải

a/ Ta có : $OA=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4,OB=4,AB=4$. Chứng tỏ OAB là tam giác đều .

b/ Gọi M(x;y) thì đẳng thức giả thiết cho tương đương với biểu thức :

Ta có : $MO^2=x^2+y^2,MA^2=x^2+y^2-4\sqrt{3}x-4y+16,MB^2=x^2+y^2-4\sqrt{3}x+4y+16$

$\Rightarrow MO^2+MA^2+MB^2=32\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-8\sqrt{3}x+32=32\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{8\sqrt{3}}{3}x=0$

$\Leftrightarrow\left(x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2$. Chứng tỏ là đường tròn (C) có tâm $I\left(\frac{4\sqrt{3}}{3};0\right),R=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

c/ Thay tọa độ O,A,B vào (1) ta thấy thỏa mãn , chứng tỏ (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

Bài 110. Viết phương trình các cạnh hình vuông ABCD biết AB,CD,lần lượt đi qua các điểm P(2;1) và Q(3;5), còn BC và AD qua các điểm R(0;1) và S(-3;-1)

Giải

Gọi (AB) có dạng y=kx+b và (AD) : y=-1/kx+b' .

Cho AB và AD qua các điểm tương ứng ta có : 2k+b=1 (1) và $\frac{3}{k}+b'=-1 \quad (2)$

Ta có : $h(Q,AB)=\frac{|3k-5+b|}{\sqrt{k^2+1}};h(R,AD)=\frac{|0+k-kb'|}{\sqrt{k^2+1}}$. Theo tính chất hình vuông :

$h(Q,AB)=h(R,AD)\Leftrightarrow \frac{|3k-5+b|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|0+k-kb'|}{\sqrt{k^2+1}}\Leftrightarrow |3k-5+b|=|k-kb'|$

Từ đó ta có hệ : $\begin{cases}2k+b=1\\ k+kb'=-3\\ |3k-5+b|=|k-kb'|\end{cases} \Rightarrow \left(k=\frac{1}{3},b=\frac{1}{3},b'=-10\right),\left(k=-7,b=15,b'=-\frac{4}{7}\right)$

Do đó : $AB:x-3y+1=0,AD:3x+y+10=0,CD:x-3y+12=0,BC:3x+y-1=0$

Hoặc : $AB:7x+y-15=0,AD:x-7y-4=0,CD:7x+y-26=0,BC:x-7y+7=0$